

Las hojas dobles como base para los morfismos de bimódulos de Soergel en el caso A_1 .

MARCELO HERNÁNDEZ CARO

AGRADECIMIENTOS

En primera instancia, quiero agradecer a mi profesor guía Steen Ryom-Hansen por su infinita paciencia y por todo el apoyo que me ha entregado desde que fue mi profesor en Álgebra durante el primer año de Magister, cuando me daba consejos para superar mis miedos respecto a las ayudantías y las presentaciones. También me gustaría agradecer a mis profesores del primer y segundo año de estudios por la formación que me han entregado, en particular al profesor David Plaza, quien me ayudó con la última parte de esta tesis. También les agradezco a las administrativas del IMAFI que siempre me han ayudado con la mejor disposición.

Por otra parte, quiero manifestar mis más sinceros agradecimientos a mi amigo Felipe, el Winni, con quien hemos delirado juntos desde el primer día del magister, partiendo con las *entretenidas* tareas que nos dejaba el profesor Hernán Castro en Análisis, hasta llegar a hablar de hojas ligeras y diagramas. Junto con él, me gustaría agradecerle a Diego Lobos por todos sus consejos, sin los cuales difícilmente me hubiese atrevido a seguir aquí. Además, me gustaría agradecerle a Gabriela Guerra por su paciencia cuando fui su ayudante, y por su amistad ahora que somos colegas. En este contexto, debo también mencionar a Camilo, Elizabeth y Luis Guajardo, quienes últimamente han estado brindándome su apoyo en la que ha sido la etapa más difícil de este trabajo.

Ahora, el segundo momento más emotivo. También quiero agradecerles a mis padres, Silvia y Marcelo, por todo el apoyo que me han dado en todo este tiempo, por su amor infinito. Tampoco puedo olvidar a mi hermana Javiera, mi abuela Flor y mi bisabuela Lupa. Gracias a todos ustedes he llegado hasta aquí. Paralela a la familia, está mi otra familia, mis amigos de infancia. Quisiera agradecerles a todos ellos por las millones de veces que me tendieron la mano cuando siquiera tenía un lugar para dormir, o simplemente cuando son la vía de escape a las cosas oscuras. Por otra parte, también les agradezco a los padres de Gabriela y a su hermano Matías, por darme ánimos y confiar en mí.

Así llega el momento más emotivo. Le agradezco de manera infinita a mi pareja Gabriela Valenzuela, por ser la persona incondicional que me acompaña día a día. Nada de esto sería posible sin ella, me levanta cuando caigo y me acompaña nuevamente. Gracias por seguirme a Talca, gracias por tu amor, gracias por ser la mejor mamá que Salvador pudo tener, gracias por todo.

Por último, agradezco a la Universidad de Talca y a la Corporación Nacional de Ciencia y Tecnología CONICYT por el financiamiento extendido durante mis estudios de magister.

Para Gabriela y Salvador

INTRODUCCIÓN

Sea (W, S) un sistema de Coxeter. A dicho sistema se le puede asociar una \mathcal{L} -álgebra asociativa $\mathcal{H} = \mathcal{H}(W, S)$, denominada álgebra de Hecke, donde \mathcal{L} es el anillo de polinomios de Laurent con coeficientes enteros. Esta álgebra está generada por elementos llamados T_x , la cual se denomina *Base estándar*. En [10] Soergel utiliza otra base para \mathcal{H} , donde cada elemento está definido por $H_x = v^{l(x)} T_x$. En [6] Kazhdan y Lusztig encontraron una tercera base para $\mathcal{H}(W, S)$, denominada *Base de Kazhdan-Lusztig* y denotada por $\{\underline{H}_w\}_{w \in W}$, la cual se puede expresar en términos de la base $\{H_x\}_{w \in W}$ gracias al resultado del Teorema 19 enunciado en este trabajo, y en donde aparecen polinomios denominados *polinomios de Kazhdan-Lusztig* en la matriz cambio de base.

Con la finalidad de estudiar los elementos básicos de la base de Kazhdan-Lusztig, se define una categoría de R -bimódulos, llamada categoría de bimódulos de Bott-Samelson, y posteriormente en base ella se define la categoría de los bimódulos de Soergel, denotada por $\mathbb{S}\text{Bim}$. En [11] Soergel construyó un isomorfismo

$$F: \mathcal{H} \rightarrow \langle \mathbb{S}\text{Bim} \rangle.$$

Además, Soergel conjeturó que $F(\underline{H}_x) = B_x$, la cual fue llamada *0-conjetura de Soergel* debido al trabajo sobre característica 0. Más tarde, B. Elias and G. Williamson en [3] demostraron la 0-conjetura de Soergel para cualquier sistema de Coxeter.

Por otra parte, dada \underline{w} secuencia en W , N. Libedinsky introdujo en [7] el concepto de *Hojas ligeras*, denotadas por $\mathbb{L}_{\underline{w}}$, y demostró que dichas hojas ligeras forman una base para el espacio de morfismos de bimódulos de Bott-Samelson. Luego, en [8], Libedinsky introdujo el concepto de *Hojas dobles*, el cual es una ampliación del concepto de hojas ligeras, y demostró que éstas forman una base para el espacio de morfismos de bimódulos $\text{Hom}(B_{\underline{w}}, B_{\underline{y}})$. Por otra parte, Elias y M. Khovanov definieron en [2] una categoría diagramatical \mathcal{D} para el caso del grupo simétrico, donde los morfismos son diagramas bajo ciertas relaciones y módulo isotopía, y demostraron que \mathcal{D} y la categoría de bimódulos de Bott-Samelson son equivalentes. Más tarde, en [4], Elias y Williamson ampliaron esta categoría a cualquier sistema de Coxeter, y también entregaron una versión diagramatical para las hojas ligeras y hojas dobles de Libedinsky, demostrando también que las hojas dobles forman una base para $\text{Hom}(B_{\underline{w}}, B_{\underline{y}})$. En este trabajo, se expone una demostración parcialmente diagramatical de este último resultado, para el caso $W = A_1$.

La estructura a seguir será la siguiente: En la primera sección se definirán los conceptos de Sistema de Coxeter, orden de Bruhat y Álgebra de Hecke, destacando en esta última las tres bases mencionadas en esta introducción. Posteriormente, en la sección 2, se introducirá el concepto de bimódulos de Bott-Samelson, con los cuales se definirán las categorías de bimódulos de Bott-Samelson y la de bimódulos de Soergel, mencionando la relación que hay entre esta última categoría y \mathcal{H} . En la sección 3 se define la categoría diagramatical \mathcal{D} para nuestro caso particular A_1 , y se entrega una definición de hojas ligeras y hojas dobles directamente en esta categoría. A su vez, se define el funtor \mathcal{F} entre \mathcal{D} y la categoría de los bimódulos de Bott-Samelson. Finalmente, en la última sección se demuestra el Teorema 32 de este trabajo.

1. SISTEMAS DE COXETER Y ÁLGEBRA DE HECKE

1.1. Sistemas de Coxeter

Sea S un conjunto. Una matriz $m: S \times S \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, \infty\}$ se denomina *Matriz de Coxeter* si

$$\begin{aligned} m(s, s') &= m(s', s) \\ m(s, s') &= 1 \Leftrightarrow s = s'. \end{aligned} \tag{1}$$

Ejemplo 1 Consideremos $S = \{s_1, s_2, s_3, s_4\}$ y la matriz

$$m = \begin{matrix} & s_1 & s_2 & s_3 & s_4 \\ \begin{matrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & \infty & 2 & 2 \\ \infty & 1 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

Como es una matriz simétrica con entradas en $\{1, 2, \dots, \infty\}$ y además solo contiene 1 en su diagonal, entonces es una matriz de Coxeter. De esta matriz, por ejemplo, se tiene que $m(s_1, s_1) = 1$, $m(s_3, s_4) = 2$, $m(s_2, s_1) = \infty$. Esta última igualdad indica que no hay relación entre s_2 y s_1 .

Una matriz m de Coxeter sobre S define un grupo W con la siguiente presentación:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Generadores: } S \\ \text{Relaciones: } (s s')^{m(s, s')} = 1 \text{ si } m(s, s') \neq \infty \end{array} \right. \quad (2)$$

Notar que si se considera $s = s'$ en la relación de (2) se tiene que $s^2 = 1$ para todo generador $s \in S$. Además, considerando $s \neq s'$ en la misma relación, se tiene que

$$\underbrace{ss'ss' \cdots ss'}_{m(s, s') \text{ factores}} = \underbrace{s'ss's \cdots s's}_{m(s, s') \text{ factores}}, \quad (3)$$

la cual en ciertas ocasiones se denomina relación de trenza cuando $m(s, s') \geq 3$. Con todo esto se tiene la siguiente definición:

Definición 2 (Sistema de Coxeter)

Sea W grupo. Si W tiene una presentación como en (2), entonces el par (W, S) se denomina Sistema de Coxeter. El grupo W es llamado grupo de Coxeter, mientras que S es el conjunto de generadores de Coxeter.

Considerando esta definición, se tiene que la matriz de Coxeter del Ejemplo 1 define el siguiente grupo de Coxeter:

$$W = \left\langle s_1, s_2, s_3, s_4 \mid \begin{array}{l} s_i^2 = 1 \quad \forall i \in \{1, 2, 3, 4\} \\ (s_1 s_3)^2 = 1 \\ (s_2 s_3)^4 = 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} (s_1 s_4)^2 = 1 \\ (s_2 s_4)^3 = 1 \end{array} \right\rangle$$

Expresando las relaciones del grupo anterior mediante trenzas se obtiene que

$$W = \left\langle s_1, s_2, s_3, s_4 \mid \begin{array}{l} s_i^2 = 1 \quad \forall i \in \{1, 2, 3, 4\} \\ s_1 s_3 = s_3 s_1 \\ s_1 s_4 = s_4 s_1 \end{array} \quad \begin{array}{l} s_2 s_3 s_2 s_3 = s_3 s_2 s_3 s_2 \\ s_2 s_4 s_2 = s_4 s_2 s_4 \end{array} \right\rangle$$

Ejemplo 3 El grupo diedral D_m es isomorfo al grupo de Coxeter

$$I_2(m) = \left\langle s_1, s_2 : \begin{array}{l} s_i^2 = 1 \quad \forall i \in \{1, 2\} \\ (s_1 s_2)^m = 1 \end{array} \right\rangle$$

La demostración de este isomorfismo se puede encontrar en [5].

Ejemplo 4 El grupo simétrico

$$\mathfrak{S}_n = \{ \sigma : [1, \dots, n] \longrightarrow [1, \dots, n] : \sigma \text{ es una biyección} \}$$

es isomorfo al grupo de Coxeter

$$A_{n-1} = \left\langle s_1, s_2, \dots, s_{n-1} \quad : \quad \begin{array}{l} s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1} \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n-2\} \\ s_i s_j = s_j s_i \quad \text{si } |i - j| > 1 \end{array} \right\rangle$$

La demostración de este isomorfismo de grupos se puede encontrar en la Proposición 1.5.4 de [1].

Ahora, consideremos un sistema de Coxeter arbitrario (W, S) . Dado un elemento $w = s_1 s_2 \cdots s_r \in W - \{1\}$, denotaremos por $l(w) = r$ al largo de w , cuando r es minimal. en tal caso, se dice que la expresión $s_1 s_2 \cdots s_r$ es una expresión reducida para w . Por convención, $l(1) = 0$.

Ejemplo 5 Consideremos $W = A_3$ con la presentación del Ejemplo 4. Tenemos que, por ejemplo,

- $l(s_1) = l(s_2) = l(s_3) = 1$.
- $l(s_2 s_3 s_1 s_3) = 2$ (y no 4), pues $s_2 s_3 s_1 s_3 = s_2 s_3 s_3 s_1 = s_2 s_1$.
- $l(s_1 s_2 s_3 s_2 s_1) = 5$.

Teorema 6 (Matsumoto) Sea un sistema de Coxeter (W, S) , y sean $s_1 s_2 \cdots s_t$ y $s'_1 s'_2 \cdots s'_t$ dos expresiones reducidas para cierto $w \in W$. Entonces se puede pasar de $s_1 s_2 \cdots s_t$ a $s'_1 s'_2 \cdots s'_t$ aplicando solamente relaciones tipo trenza.

DEMOSTRACIÓN. Ver [Lu]. □

1.1.1 Orden de Bruhat

Sea W, S sistema de Coxeter. Es necesario para propósitos posteriores definir una relación de orden entre dos elementos arbitrarios de W .

Definición 7 (Subexpresión)

Sea $w = s_1 s_2 \cdots s_t$ elemento de W reducido. Una subexpresión de esta expresión para w es una expresión de la forma

$$s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_p},$$

donde $1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_p \leq t$.

Con esta definición se puede definir una relación de orden en W .

Definición 8 (Orden de Bruhat para W)

Sea $w = s_1 s_2 \cdots s_t$ elemento de W reducido. Dado $w' \in W$ diremos que

$$w' \leq w \Leftrightarrow \text{Existe una subexpresión de } s_1 s_2 \cdots s_t \text{ que espresa a } w'.$$

La notación $w' \leq w$ es equivalente a decir que $w' < w$ o $w' = w$.

Observación: Esta no es la definición original del Orden de Bruhat. La definición original se puede revisar en [5], así como el surgimiento de la definición entregada en este trabajo.

Ejemplo 9 Retomando el Ejemplo 5, tenemos las siguientes relaciones de orden:

$$\begin{aligned} s_1 s_3 &\leq s_1 s_3 s_2 \\ s_3 s_2 s_3 &\leq s_2 s_3 s_1 s_2 \\ 1 &< s_i \quad \forall s_i \in S. \end{aligned}$$

1.2. Álgebra de Hecke

Sea (W, S) un sistema de coxeter, l la función largo correspondiente y \leq el orden de Bruhat sobre W . Sea $\mathcal{L} = \mathbb{Z}[v, v^{-1}]$ el anillo de polinomios de Laurent con coeficientes enteros en la variable v . Sobre el \mathcal{L} -módulo libre \mathcal{H} con base indexada por W definido por

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}(W, S) = \bigoplus_{x \in W} \mathcal{L}T_x,$$

se tiene el siguiente resultado:

Teorema 10 Existe una única \mathcal{L} -álgebra asociativa sobre el \mathcal{L} -módulo libre \mathcal{H} con base $\{T_x\}_{x \in W}$ tal que

$$T_x T_y = T_{xy} \quad \text{si } l(x) + l(y) = l(xy) \quad (4a)$$

$$T_s^2 = v^{-2} T_1 + (v^{-2} - 1) T_s \quad \text{si } s \in S, \quad (4b)$$

la cual se denomina *Álgebra de Hecke* asociada al sistema (W, S) y se denota por \mathcal{H} . La base de los T_x se denomina *Base Estándar*.

Este resultado es una consecuencia directa del siguiente teorema:

Teorema 11 Dado $s \in S$ y dados dos elementos a_s y b_s tales que $a_s = a_t$ y $b_s = b_t$ siempre que s y t sean conjugados en W , existe una única \mathcal{A} -álgebra asociativa sobre el \mathcal{A} -módulo libre \mathcal{E} , con T_1 actuando como la identidad, tal que las siguientes condiciones valen para todo $s \in S$ y $w \in W$:

$$T_s T_w = T_{sw} \quad \text{si } l(sw) > l(w) \quad (5a)$$

$$T_s T_w = a_s T_w + b_s T_{sw} \quad \text{si } l(sw) < l(w), \quad (5b)$$

la cual se denomina *Álgebra genérica*, y se denota por $\mathcal{E}_{\mathcal{A}}(a_s, b_s)$.

DEMOSTRACIÓN. Ver [5]. □

Cabe destacar que cada T_x , para $x = s_1 s_2 \cdots s_t$ reducido, se puede expresar por

$$T_x = T_{s_1} T_{s_2} \cdots T_{s_t},$$

expresión que gracias al Teorema 6 no depende de la expresión reducida de x considerada.

Por definición de \mathcal{H} se tiene que $\{T_x\}_{x \in W}$ es una base para \mathcal{H} . Sin embargo, definiendo $H_s = v T_s$ para todo $s \in S$, \mathcal{H} puede ser descrito como el álgebra generada por los elementos H_s , sujetos a las relaciones

$$H_s^2 = 1 + (v^{-1} - v) H_s \quad \forall s \in S \quad (6a)$$

$$\underbrace{H_s H_t H_s \cdots}_{m_{st} \text{ factores}} = \underbrace{H_t H_s H_t \cdots}_{m_{st} \text{ factores}} \quad \forall s, t \in S, s \neq t. \quad (6b)$$

Una buena observación sobre lo anterior es notar que reordenando términos en (6a) se tiene que

$$H_s(H_s + (v - v^{-1})) = 1$$

de donde se obtiene explícitamente que para todo $s \in S$,

$$H_s^{-1} = H_s + (v - v^{-1}). \quad (7)$$

Por otra parte, Soergel introduce en [10] una normalización para la base estándar, definiendo

$$H_x = v^{l(x)} T_x.$$

De esta definición se tiene el siguiente resultado:

Proposición 12 Si $x, y \in W$ tales que $l(x) + l(y) = l(xy)$, entonces

$$H_x H_y = H_{xy}.$$

DEMOSTRACIÓN. Dados x e y reducidos de W tales que $l(x) + l(y) = l(xy)$, se tiene por (4a) que

$$T_x T_y = T_{xy},$$

de donde

$$\begin{aligned} H_{xy} &= v^{l(x)+l(y)} T_{xy} \\ &= v^{l(x)} T_x v^{l(y)} T_y \\ &= H_x H_y. \end{aligned}$$

□

Otra observación importante es que cada H_x es invertible. En efecto, si $x = s_1 s_2 \cdots s_r$ reducido, entonces se tiene que $T_x = T_{s_1} T_{s_2} \cdots T_{s_r}$, y de esta igualdad, al multiplicar por v^r y reordenar, se obtiene que

$$H_x = H_{s_1} H_{s_2} \cdots H_{s_r},$$

y como cada H_{s_i} es invertible, se tiene que

$$H_x^{-1} = H_{s_r}^{-1} H_{s_{r-1}}^{-1} \cdots H_{s_1}^{-1}.$$

Teorema 13 $\{H_x\}_{x \in W}$ es una base para \mathcal{H} .

DEMOSTRACIÓN. Es consecuencia del hecho de que $\{T_x\}_{x \in W}$ es base de \mathcal{H} . □

1.3. Base y polinomios de Kazhdan-Lusztig

Desde ahora, se verá a \mathcal{H} como el álgebra generada por $\{H_x\}_{x \in W}$, y mediante ésta base se construirá otra base para \mathcal{H} , llamada la base de Kazhdan-Lusztig, en la cual se encuentran implícitamente los polinomios de Kazhdan-Lusztig. Para esto, se necesitan previamente algunas definiciones y resultados.

Definición 14 Se define la función $d : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$, con notación $d(h) = \bar{h}$, mediante las relaciones

$$v \longmapsto \bar{v} = v^{-1}$$

y

$$H_x \longmapsto \bar{H}_x = (H_{x^{-1}})^{-1}$$

más linealidad.

Proposición 15 Para $s \in S, x \in W$, se tiene que

$$d(H_s H_x) = d(H_s) d(H_x).$$

DEMOSTRACIÓN. Por linealidad de d y definición de H_s y H_x se tiene que

$$d(H_s H_x) = v^{l(x)+1} d(T_s T_x). \quad (8)$$

Aquí hay dos casos a considerar:

- Si $l(sx) > l(x)$, entonces por la primera relación del Lema (??) se tiene que $T_s T_x = T_{sx}$, de donde

$$\begin{aligned}
d(H_s H_x) &= v^{l(x)+1} d(T_{sx}) \\
&= d(v^{l(sx)} H_{sx}) \\
&= d(H_{sx}) \\
&= \left(H_{(sx)^{-1}} \right)^{-1} \\
&= \left(v^{l(x^{-1}s)} T_{x^{-1}s} \right)^{-1}.
\end{aligned}$$

pero $l(x^{-1}s) = l(sx) = l(x) + l(s) = l(x^{-1}) + l(s)$, por lo que nuevamente por Lema (??) se tiene que $T_{x^{-1}s} = T_{x^{-1}} T_s$, y por lo tanto

$$\begin{aligned}
d(H_s H_x) &= (v T_s)^{-1} \left(v^{l(x^{-1})} T_{x^{-1}} \right)^{-1} \\
&= H_s^{-1} \left(H_{x^{-1}} \right)^{-1} \\
&= d(H_s) d(H_x).
\end{aligned}$$

- Si $l(sx) < l(x)$, sea $u = (sx)^{-1} = x^{-1}s$, de donde $x^{-1} = us$. Además, por Lema (??) se tiene que $T_s T_x = (v^{-2} - 1) T_x + v^{-2} T_{sx}$, por lo que aplicando la definición de d se obtiene que

$$d(H_s H_x) = (v - v^{-1}) (H_{us})^{-1} + (H_u)^{-1}. \quad (9)$$

Por otra parte, $l(us) = l(x) = l(sx) + 1 = l(u) + l(s)$, por lo que

$$H_u H_s = H_{us}. \quad (10)$$

Aplicando (10) en (9) se tiene que

$$d(H_s H_x) = (v - v^{-1}) H_s (H_u)^{-1} + (v - v^{-1})^2 (H_u)^{-1} + (H_u)^{-1}. \quad (11)$$

Y por otra parte,

$$\begin{aligned}
d(H_s) d(H_x) &= (H_s)^{-1} (H_{x^{-1}})^{-1} \\
&= (H_s)^{-2} (H_u)^{-1} \\
&= \left[(H_s)^2 + 2H_s(v - v^{-1}) + (v - v^{-1})^2 \right] (H_u)^{-1} \\
&= \left[1 + (v - v^{-1})H_s + (v - v^{-1})^2 \right] (H_u)^{-1} \\
&= (v - v^{-1})H_s (H_u)^{-1} + (v - v^{-1})^2 (H_u)^{-1} + (H_u)^{-1},
\end{aligned} \quad (12)$$

de donde comparando lo obtenido en (11) y (12) se tiene que $d(H_s H_x) = d(H_s) d(H_x)$.

□

Teorema 16

$$d(H_x H_y) = d(H_x) d(H_y)$$

para todo x, y en W .

DEMOSTRACIÓN. Por inducción sobre $l(x)$.

Si $l(x) = 1$ entonces $x = s \in S$ y el teorema se reduce a la proposición anteriormente demostrada.

Supóngase que $l(x) > 1$. Es posible encontrar un $s \in S$ tal que $l(xs) < l(x)$, de onde se obtiene que $H_{xs} H_s = H_x$, por lo que

$$d(H_x H_y) = d(H_{xs} H_s H_y).$$

Ahora, como $\{H_w\}_{w \in W}$ es base de \mathcal{H} y $H_s H_y \in \mathcal{H}$, se puede afirmar que

$$H_s H_y = \sum_{w \in W} p_w(v) H_w,$$

donde $p_w(v) \in \mathbb{Z}[v, v^{-1}]$.

Con esto, se tiene que

$$\begin{aligned} d(H_x) d(H_y) &= d\left(H_{xs} \sum_{w \in W} p_w(v) H_w\right) \\ &= \sum_{w \in W} p_w(v^{-1}) d(H_{xs} H_w) \\ &\stackrel{hip}{=} \sum_{w \in W} p_w(v^{-1}) d(H_{xs}) d(H_w) \\ &= d(H_{xs}) d\left(\sum_{w \in W} p_w(v) H_w\right) \\ &= d(H_{xs}) d(H_s) d(H_y) \\ &= d(H_x) d(H_y). \end{aligned}$$

□

Con el último teorema se ha demostrado que d es un homomorfismo de anillos. Más aún, se tiene lo siguiente:

Proposición 17 d es involución.

DEMOSTRACIÓN. Por una parte,

$$\begin{aligned} d(d(v)) &= d(v^{-1}) \\ &= d(v)^{-1} \\ &= (v^{-1})^{-1} \\ &= v. \end{aligned}$$

Por otra parte, si $x \in W$,

$$\begin{aligned} d(d(H_x)) &= d\left((H_{x^{-1}})^{-1}\right) \\ &= d(H_{x^{-1}})^{-1} \\ &= \left((H_x)^{-1}\right)^{-1} \\ &= H_x. \end{aligned}$$

□

Solo resta una definición previa al teorema final de esta subsección.

Definición 18 Se dice que $H \in \mathcal{H}$ es auto-dual si $\overline{H} = H$.

Teorema 19 (Kazhdan-Lusztig)

Para todo $x \in W$ existe un único elemento auto-dual, denotado \underline{H}_x , tal que

$$\underline{H}_x \in H_x + \sum_{y \in W} v\mathbb{Z}[v]H_y.$$

En la descomposición anterior, los elementos de $v\mathbb{Z}[v]$ son llamados *polinomios de Kazhdan-Lusztig*.

DEMOSTRACIÓN. Sea $x \in W$. Para $s \in S$ se define

$$C_s = H_s + v.$$

Claramente C_s es un elemento auto-dual de \mathcal{H} . Ahora, es necesario definir una regla de multiplicación para el producto $H_x C_s$, la cual se separa en dos casos posibles:

- Si $xs > x$ entonces

$$\begin{aligned} H_x C_s &= H_x(H_s + v) \\ &= H_x H_s + v H_x \\ &= H_{xs} + v H_x. \end{aligned}$$

- Si $xs < x$ entonces

$$\begin{aligned} H_x C_s &= H_x H_s + v H_x \\ &= v^{l(x)+1} T_x T_s + v^{l(x)+1} T_x \\ &= v^{l(x)+1} [(v^{-2} - 1) T_x + v^{-2} T_{xs}] + v^{l(x)+1} T_x \\ &= v^{l(x)-1} T_x - v^{l(x)+1} T_x + v^{l(x)-1} T_{xs} + v^{l(x)+1} T_x \\ &= v^{-1} H_x + H_{xs}. \end{aligned}$$

Para la existencia, se demostrará que para el $x \in W$ dado inicialmente existe un elemento autodual $\underline{H}_x \in \mathcal{H}$ tal que

$$\underline{H}_x \in H_x + \sum_{y < x} v\mathbb{Z}[v]H_y.$$

Por inducción sobre el orden de Bruhat respecto a x .

Si $x = e$ entonces

$$\underline{H}_e = H_e = 1.$$

Supóngase que $x \neq 1$ y que la afirmación vale para todo $w \in W$ tal que $w < x$, es decir, que para tal w se conoce el elemento

$$\underline{H}_w \in H_w + \sum_{y < w} v\mathbb{Z}[v]H_y.$$

Como $x \neq 1$, se puede encontrar un $s \in S$ tal que

$$xs < x,$$

y aplicando la hipótesis inductiva a xs se tiene que existe

$$\underline{H}_{xs} = H_{xs} + \sum_{y < xs} h_y H_y,$$

donde $h_y \in v\mathbb{Z}[v]$.

En esta última igualdad, multiplicando por C_s se obtiene que

$$\underline{H}_{xs}C_s = H_{xs}C_s + \left(\sum_{y < xs} h_y H_y \right) C_s.$$

Ahora, por definición de C_s se puede expresar la última igualdad como

$$\underline{H}_{xs}C_s = H_x + vH_{xs} + v \left(\sum_{y < xs} h_y H_y \right) + \left(\sum_{y < xs} h_y H_y H_s \right). \quad (13)$$

Sin embargo, (13) se puede expresar como

$$\underline{H}_{xs}C_s = H_x + \left(\sum_{y < x} h_y H_y \right), \quad (14)$$

donde en este caso $h_y \in \mathbb{Z}[v]$ (pues precisamente el coeficiente polinomial de H_{xs} puede ser un polinomio con término constante no nulo).

La expresión construída en la igualdad (14) no puede ser directamente una expresión válida para \underline{H}_x , pues puede existir algún $h_y \notin v\mathbb{Z}[v]$. Sin embargo,

$$H_x = \underline{H}_{xs}C_s - \sum_{y < x} h_y(0)\underline{H}_y$$

es una expresión que cumple lo pedido.

La unicidad se puede revisar en [10].

□

Finalmente:

Teorema 20 El conjunto $\{\underline{H}_x\}_{x \in W}$ es una base para \mathcal{H} , llamada *Base de Kazhdan-Lusztig*.

DEMOSTRACIÓN. Ver [6]

□

2. CATEGORÍA DE BIMÓDULOS DE SOERTEL

En esta sección (y en las restantes) las definiciones y resultados establecidos serán considerando a W de tipo A_1 , es decir, al sistema de coxeter (W, S) donde $S = \{s\}$ (un solo generador). Esto permite elaborar definiciones y relaciones bastante más sencillas.

Primero, se define V como el espacio vectorial sobre los reales cuya base está dada por el elemento α_s , es decir, $V = \mathbb{R}\alpha_s$. Por otra parte, se define R como el anillo de polinomios $R = \mathbb{R}[\alpha_s]$, donde $\deg(\alpha_s) = 2$, y con esto se define el conjunto

$$R^s = \{x \in R / s \cdot x = x\}$$

donde la acción \cdot de S en R está dada por

$$s \cdot \alpha_s = -\alpha_s. \quad (15)$$

En lo que sigue, ocuparemos la notación \underline{n} para definir a la palabra de S^n

$$\underline{n} = \underbrace{SSS \cdots S}_{n \text{ veces}}. \quad (16)$$

con la convención $\underline{0} = 1$.

Por otra parte, dado un objeto graduado $B = \oplus_{i \in \mathbb{Z}} B_i$ se define el *shift* de B en d unidades, denotado $B(d)$, como el objeto obtenido a partir de B desplazando la graduación en d unidades:

$$B(d)_i = B_{i+d}.$$

Finalmente, se define el R -bimódulo graduado

$$B_S = R \otimes_{R^s} R(1).$$

Con todas estas nuevas definiciones, estamos en condiciones de introducir un nuevo concepto.

Definición 21 (Bimódulo de Bott-Samelson)

Sea $\underline{n} \in S^n$. Se define el bimódulo de Bott-Samelson asociado a \underline{n} , denotado por $B_{\underline{n}}$, como el (R, R) -bimódulo graduado

$$B_{\underline{n}} = \underbrace{B_S \otimes_R B_S \otimes_R \cdots \otimes_R B_S}_{n \text{ tensores}}. \quad (17)$$

donde se considera la convención $B_{\underline{0}} = B_1 = R$.

Notación 1 Desde ahora usaremos la notación multiplicativa entre bimódulos para representar el producto tensor, es decir

$$B_{\underline{n}} B_{\underline{m}} = B_{\underline{n}} \otimes_R B_{\underline{m}}.$$

Con estos bimódulos se pueden construir los objetos de una nueva categoría, definida a continuación:

Definición 22 (Categoría de los Bimódulos de Bott-Samelson)

Se define la categoría de los Bimódulos de Bott-Samelson, denotada por $\mathbb{B}\mathcal{S}\text{Bim}$, como la categoría cuyos objetos son sumas de bimódulos de Bott-Samelson shifteados y cuyos morfismos son homomorfismos de (R, R) -bimódulos.

Con $\mathbb{B}\mathcal{S}\text{Bim}$ se puede definir una nueva categoría:

Definición 23 (Categoría de los Bimódulos de Soergel)

Se define la categoría de los Bimódulos de Soergel, denotada por $\mathcal{S}\text{Bim}$, como la categoría cuyos objetos son sumas de shifts de sumandos de bimódulos de Bott-Samelson y cuyos morfismos son homomorfismos de (R, R) -bimódulos.

En otras palabras, $\mathcal{S}\text{Bim}$ es la completación de Karoubi de $\mathbb{B}\mathcal{S}\text{Bim}$.

En esta parte se debe mencionar una conexión entre $\mathcal{H}(W, S)$ y $\mathcal{S}\text{Bim}$. Para ello, necesitamos una definición previa.

Definición 24 Dada una categoría aditiva \mathcal{A} , se define el grupo de (descomposición) de Grothendieck escindido de \mathcal{A} , denotado por $\langle \mathcal{A} \rangle$, como el grupo abeliano libre generado por los objetos de \mathcal{A} modulo las relaciones

$$M = M' + M'' \quad \text{si } M \cong M' \oplus M''.$$

Dado un objeto A , se denota por $\langle A \rangle$ a su clase en $\langle \mathcal{A} \rangle$.

La conexión aludida anteriormente entre \mathcal{H} y $\mathbb{S}\text{Bim}$ está dada por el siguiente teorema, demostrado por Soergel en [11].

Teorema 25 Existe un único isomorfismo de álgebras

$$F: \mathcal{H}(W, S) \rightarrow \langle \mathbb{S}\text{Bim} \rangle$$

definido por

$$\underline{H}_s \mapsto \langle B_s \rangle.$$

Este homomorfismo es un isomorfismo de $\mathbb{Z}[v, v^{-1}]$ -álgebras, donde se considera a $\langle \mathbb{S}\text{Bim} \rangle$ como una $\mathbb{Z}[v, v^{-1}]$ -álgebra definiendo las reglas

$$\langle M \rangle \langle N \rangle = \langle MN \rangle$$

y

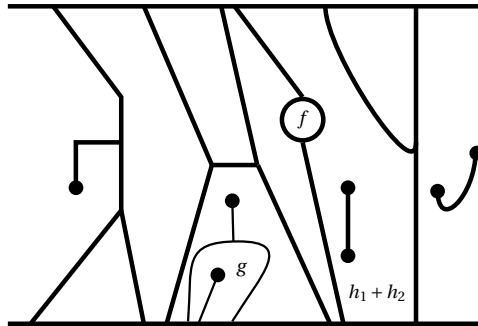
$$v^k \langle M \rangle = \langle M(k) \rangle.$$

3. CATEGORÍA DE DIAGRAMAS Y HOJAS LIGERAS

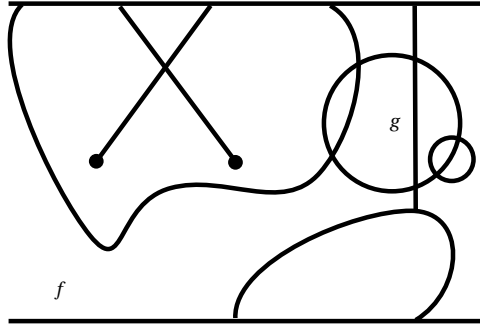
En esta sección se definirá una nueva categoría de diagramas, dentro de la cual se definirán los conceptos de hojas ligeras y hojas dobles con los cuales posteriormente se trabajarán en $\mathbb{B}\mathbb{S}\text{Bim}$ vía un funtor.

Definición 26 (Diagrama para (A_1, S)) Un diagrama para (A_1, S) es un diagrama con frontera incrustado en la banda $\mathbb{R} \times [0, 1]$. Las aristas del diagrama pueden terminar en un vértice del diagrama (el cual siempre está dentro de la banda), o bien, en la frontera de la banda, en donde dicha intersección de la arista con una de las fronteras se denomina punto frontera o marca, y no es considerada vértice del diagrama. Dichas marcas definen secuencias en S , tanto en la banda inferior como superior. Las aristas pueden formar lazos (*loops*). Además, en las regiones definidas por las aristas se aceptan decoraciones con elementos de R . Los vértices solamente pueden ser el punto final de una arista o la intersección de tres aristas. Todo lo anterior está considerado módulo isotopía.

Por ejemplo, la siguiente imagen muestra un diagrama bajo la definición recién dada:



Por contraparte, la siguiente imagen muestra un dibujo que no es un diagrama bajo esta definición:



Con esto se tiene una nueva categoría.

Definición 27 (Categoría de diagramas \mathcal{D})

Se define la categoría de diagramas \mathcal{D} como la categoría \mathbb{R} -lineal y monoidal cuyos objetos son secuencias $\underline{n} \in S^n$. El espacio $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(\underline{n}, \underline{m})$ es el \mathbb{R} -módulo libre generado por diagramas cuyas marcas en banda inferior forman la secuencia \underline{n} y cuyas marcas en la banda superior forman la secuencia \underline{m} . La composición $g \circ f$ (denotada de manera multiplicativa cuando no surgan confusiones), donde $f \in \text{Hom}_{\mathcal{D}}(\underline{n}, \underline{m})$ y $g \in \text{Hom}_{\mathcal{D}}(\underline{m}, \underline{t})$, está dada por la concatenación vertical de los diagramas (en este caso, g sobre f). La estructura monoidal está dada por la concatenación horizontal de los diagramas, la cual se denotará por $f \otimes g$ cuando se concatena horizontalmente, de izquierda a derecha, f con g . Todo lo anterior está sujeto a las siguientes relaciones:

$$\begin{array}{c} \bullet \\ | \\ \bullet \end{array} = \alpha_s \tag{18}$$

$$\begin{array}{c} | \\ \circ \\ | \end{array} = 0 \tag{19}$$

$$\begin{array}{c} | \\ | \bullet \\ | \end{array} = \begin{array}{c} | \\ | \\ | \end{array} \tag{20}$$

$$\begin{array}{c} | \\ \diagdown \quad \diagup \\ | \quad | \\ \diagup \quad \diagdown \\ | \quad | \end{array} = \begin{array}{c} | \\ \diagup \quad \diagdown \\ | \quad | \\ \diagdown \quad \diagup \\ | \quad | \end{array} \tag{21}$$

$$\begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \\ | \quad | \\ \diagup \quad \diagdown \\ | \quad | \end{array} = \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ | \quad | \\ \diagdown \quad \diagup \\ | \quad | \end{array} \tag{22}$$

$$\text{Diagram 1} = \text{Diagram 2} + \text{Diagram 3} \quad (23)$$

$$f = s(f) + \partial(f) \quad (24)$$

donde $\partial: R \rightarrow R$ es el operador de Demazure definido por

$$\partial(f) = \frac{f - sf}{\alpha_s}. \quad (25)$$

En lo que sigue, llamaremos por *dots* a los morfismos de la forma

$$D_0 = \text{Diagram 1} \quad \text{o} \quad D_1 = \text{Diagram 2}$$

Notar que el primer dot pertenece a $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(\underline{1}, \underline{0})$ y el segundo a $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(\underline{0}, \underline{1})$. Por otra parte, llamaremos *trivalentes* a los morfismos que son las intersecciones de tres aristas, es decir, diagramas de la forma

$$T_0 = \text{Diagram 1} \quad \text{o} \quad T_1 = \text{Diagram 2}$$

donde el primer trivalente pertenece a $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(\underline{2}, \underline{1})$ y el segundo a $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(\underline{1}, \underline{2})$.


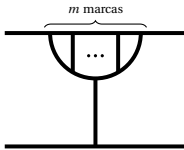
De las relaciones (21) y (22) se puede afirmar que sin importar el orden en el que concatenemos verticalmente dos o más trivalentes del mismo tipo, esta concatenación representa un único morfismo en el espacio $\text{Hom}_{\mathcal{D}}$ respectivo. Siguiendo lo anterior, si a dicha concatenación de trivalentes del mismo tipo se le concatena un dot por arriba (en caso de concatenaciones de T_0), o bien, un dot por abajo (en caso de concatenaciones de T_1), el morfismo resultante sigue siendo único. De aquí surge una clase de diagramas que se representa por uno solo, definido a continuación.

Definición 28 (Jaula, jaula conectada)

Para $m \in \mathbb{N}$ se define una jaula de largo m como la única concatenación vertical de $m-1$ trivalentes, siendo todos ellos T_0 o todos T_1 , a la cual se le concatena un D_0 por arriba (en el caso de T_0) o un D_1 por abajo (en el caso de T_1). En tales casos, la jaula se denota por el diagrama

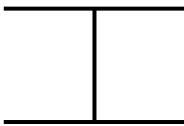
$$J_m = \text{Diagram 1} \in \text{Hom}_{\mathcal{D}}(\underline{m}, \underline{0}) \quad \text{o} \quad J'_m = \text{Diagram 2} \in \text{Hom}_{\mathcal{D}}(\underline{0}, \underline{m})$$

De manera análoga, se define una jaula conectada de largo m como la única concatenación vertical de $m - 1$ trivalentes, siendo todos ellos T_0 o todos T_1 . En tales casos, la jaula conectada se denota por el diagrama

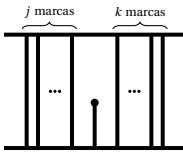
$$JC_m = \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \in \text{Hom}_{\mathcal{Q}}(\underline{m}, \underline{1}) \quad \text{o} \quad JC'_m = \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ | \\ \text{---} \end{array} \in \text{Hom}_{\mathcal{Q}}(\underline{1}, \underline{m})$$



En particular, considerando $m = 1$, se tienen las siguientes definiciones:

$$J_1 = D_0, \quad J'_m = D_1$$

$$JC_1 = JC'_1 = \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \end{array} := Id.$$


Por otra parte, el espacio $\text{Hom}_{\mathcal{Q}}(\underline{n}, \underline{m})$, considerando las definiciones y relaciones anteriores, se define como el espacio generado por los diagramas

$$g_{1,j,k} = \begin{array}{c} \overbrace{\text{---}}^{j \text{ marcas}} \quad \overbrace{\text{---}}^{k \text{ marcas}} \\ | \quad | \quad | \quad | \\ \dots \\ | \quad | \quad | \quad | \\ \text{---} \end{array} \quad (26)$$


$$g_{2,j,k} = \begin{array}{c} \overbrace{\text{---}}^{j \text{ marcas}} \quad \overbrace{\text{---}}^{k \text{ marcas}} \\ | \quad | \quad | \quad | \\ \dots \\ | \quad | \quad | \quad | \\ \text{---} \end{array} \quad (27)$$

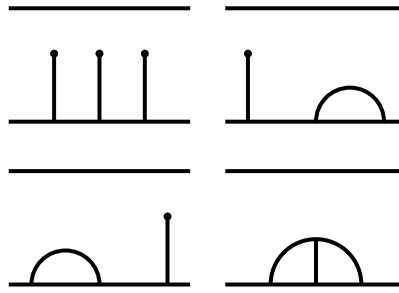

$$g_{3,j,k} = \begin{array}{c} \overbrace{\text{---}}^{j \text{ marcas}} \quad \overbrace{\text{---}}^{k \text{ marcas}} \\ | \quad | \quad | \quad | \\ \dots \\ | \quad | \quad | \quad | \\ \text{---} \end{array} \quad (28)$$


$$g_{4,j,k} = \begin{array}{c} \overbrace{\text{---}}^{j \text{ marcas}} \quad \overbrace{\text{---}}^{k \text{ marcas}} \\ | \quad | \quad | \quad | \\ \dots \\ | \quad | \quad | \quad | \\ \text{---} \end{array} \quad (29)$$

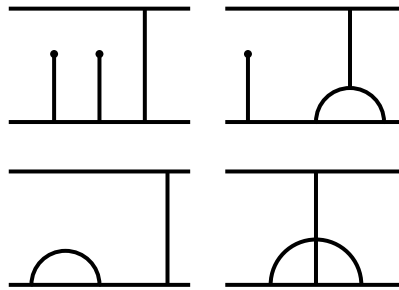

en el sentido multiplicativo y aditivo. Es decir, un diagrama en cualquier $\text{Hom}_{\mathcal{Q}}(\underline{n}, \underline{m})$ se puede expresar como una combinación lineal de concatenaciones verticales de diagramas $g_{i,j,k}$, donde $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ y j, k son enteros no negativos, tales que cada concatenación tenga n marcas en la banda inferior y m marcas en la superior. Sin embargo, este espacio cuenta con otra base, y para estudiarla necesitamos un concepto previo.

Definición 29 (Hoja ligera) Una hoja ligera es una concatenación horizontal de diagramas tipo J_m , cuyo último morfismo, de izquierda a derecha, puede ser también un diagrama tipo JC_m .

De la definición anterior se tiene que solo los espacios de tipo $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(n, 0)$ o $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(n, 1)$ tienen hojas ligeras asociadas. Por ejemplo, las hojas ligeras de $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(3, 0)$ son las siguientes:



Por otra parte, las hojas ligeras para $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(3, 1)$ son las siguientes:



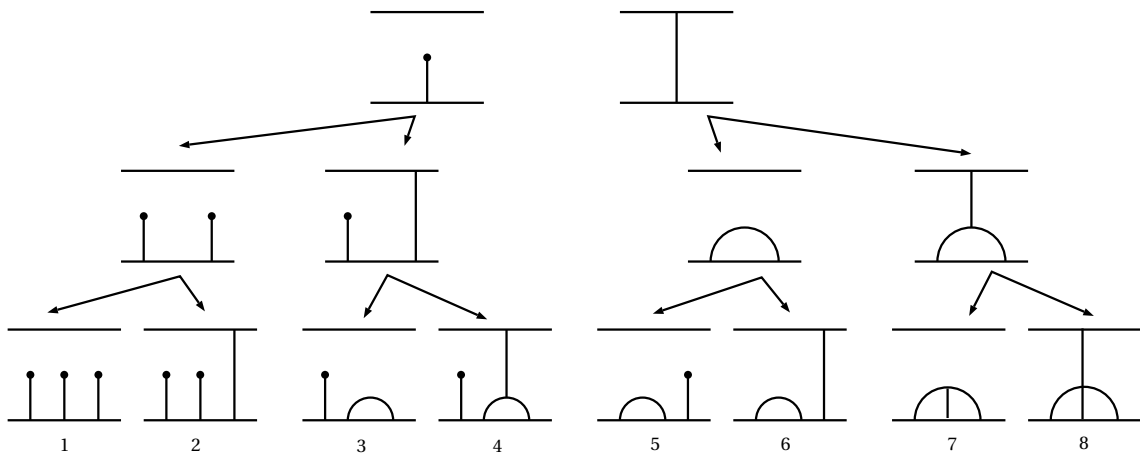
En general, tanto $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(n, 0)$ como $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(n, 1)$ tienen 2^{n-1} hojas ligeras cada uno. Una manera de obtener al mismo tiempo ambos conjuntos de hojas ligeras es mediante el siguiente procedimiento inductivo, el cual entrega un árbol binario de exactamente 2^n hojas. Inicialmente, el procedimiento parte con los diagramas



donde el primer diagrama es la única hoja ligera de $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(1, 0)$ y el segundo es la única hoja ligera de $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(1, 1)$. Posteriormente, para obtener las hojas ligeras de $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(k, 0)$ y $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(k, 1)$, con $k > 1$, nos apoyamos en las hojas ligeras del paso anterior (es decir, las hojas ligeras de $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(k-1, 0)$ y $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(k-1, 1)$), y cada una de estas hojas nos dará dos hojas ligeras nuevas bajo las siguientes reglas:

- Si la hoja, digamos h , pertenece a $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(k-1, 0)$, entonces h origina dos nuevas hojas: $h \otimes D_0$ y $h \otimes Id$.
- Si la hoja, digamos h , pertenece a $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(k-1, 1)$, entonces h origina dos nuevas hojas: $J_2 h$ y $JC_2 h$.

Si se respeta el orden anterior, entonces al leer las hojas resultantes de izquierda a derecha, se tiene que las de posición impar son las pertenecientes a $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(\underline{n}, \underline{0})$, y las otras son las pertenecientes a $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(\underline{n}, \underline{1})$. A continuación se presenta un árbol binario que muestra las hojas para $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(\underline{3}, \underline{0})$ y $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(\underline{3}, \underline{1})$:



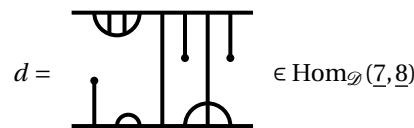
Del árbol anterior se puede concluir que los diagramas 1,3,5 y 7 corresponden a las hojas ligeras de $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(\underline{3}, \underline{0})$, mientras que los diagramas 2,4,6 y 8 corresponden a las hojas ligeras de $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(\underline{3}, \underline{1})$.

Para introducir el concepto de hojas dobles, se necesita previamente un homomorfismo que actúa sobre diagramas. Más precisamente:

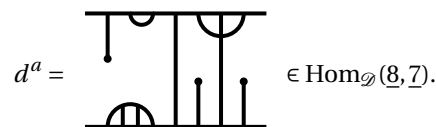
Definición 30 (*flip*)

Se define el homomorfismo $flip : \text{Hom}_{\mathcal{D}}(\underline{n}, \underline{m}) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(\underline{m}, \underline{n})$, el cual recibe un diagrama y le aplica una reflexión respecto a la recta horizontal $\mathbb{R} \times 0,5$, más linealidad. Si h es un diagrama de $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(\underline{n}, \underline{m})$, su imagen bajo $flip$ se denotará por $h^a \in \text{Hom}_{\mathcal{D}}(\underline{m}, \underline{n})$.

Por ejemplo, si consideramos al diagrama



entonces



Ahora, la definición de una hoja doble.

Definición 31 (Hoja doble)

Un diagrama $h \in \text{Hom}_{\mathcal{D}}(\underline{n}, \underline{m})$ se denomina hoja doble de $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(\underline{n}, \underline{m})$ si es de la forma $h = h_1^a h_2$, donde $h_1 \in \text{Hom}_{\mathcal{D}}(\underline{m}, \underline{0}) \cup \text{Hom}_{\mathcal{D}}(\underline{m}, \underline{1})$ es hoja ligera y $h_2 \in \text{Hom}_{\mathcal{D}}(\underline{n}, \underline{0}) \cup \text{Hom}_{\mathcal{D}}(\underline{n}, \underline{1})$ también es hoja ligera, de tal manera que la composición sea posible.

Para comodidad de notación, denotaremos por \mathbb{L}_n al conjunto de hojas ligeras con n marcas en su banda inferior. Además, denotaremos por \mathbb{L}_n^a al conjunto

$$\mathbb{L}_n^a = \{h^a / h \in \mathbb{L}_n\}.$$

Finalmente denotaremos por $\mathbb{L}_m^a \cdot \mathbb{L}_n$ al conjunto

$$\mathbb{L}_m^a \cdot \mathbb{L}_n = \{fg / f \in \mathbb{L}_m^a \text{ y } g \in \mathbb{L}_n\}.$$

3.1. El funtor \mathcal{F}

En [11] se define un funtor $\mathcal{F} : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{B}\mathbb{S}\mathbb{B}\text{im}$ y se demostró que es una equivalencia (ver teorema 6.28 en [4]). Esto permite trabajar en diagramas y ver eventuales resultados en homomorfismos de bimódulos de Bott-Samelson. La definición explícita para \mathcal{F} se entrega en este caso para los siguientes morfismos en \mathcal{D} :

$$\left| \begin{array}{l} \xrightarrow{\mathcal{F}} \mathcal{F}(D_0) = d_0 : B_s \rightarrow R \\ p \otimes q \rightarrow pq \end{array} \right. \quad (30)$$

$$\left| \begin{array}{l} \xrightarrow{\mathcal{F}} \mathcal{F}(D_1) = d_1 : R \rightarrow B_s \\ 1 \rightarrow \frac{1}{2} (\alpha_s \otimes 1 + 1 \otimes \alpha_s) \end{array} \right. \quad (31)$$

$$\left. \begin{array}{l} \xrightarrow{\mathcal{F}} \mathcal{F}(T_0) = t_0 : B_s B_s \rightarrow B_s \\ p \otimes q \otimes r \rightarrow p \partial_s(q) \otimes r \end{array} \right. \quad (32)$$

$$\left. \begin{array}{l} \xrightarrow{\mathcal{F}} \mathcal{F}(T_1) = t_1 : B_s \rightarrow B_s B_s \\ p \otimes q \rightarrow p \otimes 1 \otimes q, \end{array} \right. \quad (33)$$

donde ∂_s es el operador de Demazure definido en (25). Además, para un objeto $\underline{n} \in \mathcal{D}$, se tiene que

$$\mathcal{F}(\underline{n}) = B_{\underline{n}}.$$

Basta con las relaciones (30), (31), (32) y (33) para definir cualquier imagen de un generador $g_{i,j,k}$ bajo el funtor \mathcal{F} , pues dicho generador se puede obtener al aplicar el homomorfismo de bimódulos identidad tensorizado j veces a izquierda y k veces a derecha en $\mathcal{F}(g_{i,0,0})$.

Libedinsky demostró en [8] el siguiente resultado:

Teorema 32 El conjunto $\mathcal{F}(\mathbb{L}_m^a \cdot \mathbb{L}_n)$ es una base para $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(B_{\underline{n}}, B_{\underline{m}})$ como R -módulo.

Este teorema se demuestra en las secciones siguientes para el caso W tipo A_1 .

4. HOJAS DOBLES COMO BASE PARA LOS MORFISMOS DE $\mathbb{B}\mathbb{S}\mathbb{B}\text{IM}$

4.1. Generación en términos de hojas dobles

Los morfismos de la categoría \mathcal{D} , tal como se mencionó en la sección anterior, están generados por los morfismos $g_{i,j,k}$ definidos en (26), (27), (28) y (29), por lo que se demostrará que cada $g_{i,j,k}$ se

puede expresar como combinación lineal de hojas dobles para concluir que éstas generan a todos los morfismos del espacio respectivo.

A continuación se presenta una demostración diagramatical, la cual se basa en distintos resultados previos que se irán demostrando. En muchos de estos resultados se utilizará el elemento de R definido por $f = \frac{\alpha s}{2}$. Notar que de esta última definición se tiene que $sf = -f$.

Lo primero es ver como se puede descomponer en términos de hojas dobles el diagrama

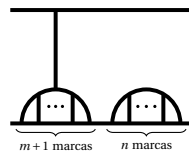
donde m y n son números naturales. Para lograr la descomposición de (34) es necesario notar en primera instancia que

de donde se obtiene que

Ahora, volviendo a (34) tenemos que

$$\begin{aligned}
 & \text{Diagram 1} = \text{Diagram 2} \\
 & \stackrel{(35)}{=} - \text{Diagram 3} + \text{Diagram 4} + \text{Diagram 5} \\
 & = - \text{Diagram 6} + \text{Diagram 7} + \text{Diagram 8} \quad (36)
 \end{aligned}$$

Sin embargo, en el último desarrollo, el diagrama de la derecha



no es una hoja ligera, por lo que se necesita reescribirlo en términos de hojas dobles. Para esto, consideremos las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned}
 & \text{Diagram 1} = \text{Diagram 2} \\
 & = \text{Diagram 3} - f \text{Diagram 4} + \text{Diagram 5} \quad (37)
 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
 & \text{Diagram 1} = \text{Diagram 2} \\
 & = \text{Diagram 3} - sf \text{ Diagram 4} \\
 & = \text{Diagram 5} + f \text{ Diagram 6} .
 \end{aligned} \tag{38}$$

Restando (38) a (37) y despejando apropiadamente se obtiene que

$$\text{Diagram 1} = \text{Diagram 2} - 2f \text{ Diagram 3} + \text{Diagram 4} ,$$

con lo cual

$$\begin{aligned}
 & \text{Diagram 1} = \text{Diagram 2} \\
 & = \text{Diagram 3} - 2f \text{ Diagram 4} + \text{Diagram 5} \\
 & = \text{Diagram 6} - 2f \text{ Diagram 7} + \text{Diagram 8}
 \end{aligned} \tag{39}$$

por lo que combinando (36) y (39) se obtiene finalmente una escritura en términos de hojas ligeras para el diagrama (34), lo cual se deja como proposición.

Proposición 33 Para m y n naturales se tiene que

Lo segundo que se necesita es una escritura en términos de hojas ligeras para el diagrama

lo cual se obtiene con la siguiente proposición.

Proposición 34 Para m y n naturales se tiene que

DEMOSTRACIÓN. Aplicando la relación polinomial de manera local en lo enmarcado con línea roja segmentada se tiene que

y como $sf = -f$ se tiene la proposición. □

Otro resultado que será útil para la demostración principal de esta sección es el siguiente:

Proposición 35 Para todo m natural y n natural se tiene que

DEMOSTRACIÓN. Análoga a la Proposición 34. □

Para continuar la demostración de esta sección es necesario notar que las proposiciones 1, 2 y 3 siguen valiendo bajo la aplicación del homomorfismo *flip*, lo cual se deja como cuarta proposición en esta sección.

Proposición 36 Para m, n naturales se cumplen las siguientes igualdades:

$$\begin{array}{c} \overbrace{\dots}^{m \text{ marcas}} \quad \overbrace{\dots}^{n \text{ marcas}} \\ \vdots \\ \text{---} \end{array} = \begin{array}{c} \overbrace{\dots}^{m+1 \text{ marcas}} \quad \overbrace{\dots}^{n \text{ marcas}} \\ \vdots \\ \text{---} \end{array} + \begin{array}{c} \overbrace{\dots}^{m \text{ marcas}} \quad \overbrace{\dots}^{n+1 \text{ marcas}} \\ \vdots \\ \text{---} \end{array} - 2f \begin{array}{c} \overbrace{\dots}^{m+n+1 \text{ marcas}} \\ \vdots \\ \text{---} \end{array} \quad (41)$$

$$\begin{array}{c} \overbrace{\dots}^{m \text{ marcas}} \quad \overbrace{\dots}^{n \text{ marcas}} \\ \vdots \\ \text{---} \end{array} = -f \begin{array}{c} \overbrace{\dots}^{m+n \text{ marcas}} \\ \vdots \\ \text{---} \end{array} + \begin{array}{c} \overbrace{\dots}^{m \text{ marcas}} \quad \overbrace{\dots}^{n \text{ marcas}} \\ \vdots \\ \text{---} \end{array} \quad (42)$$

$$\begin{array}{c} \overbrace{\dots}^{m \text{ marcas}} \quad \overbrace{\dots}^{n \text{ marcas}} \\ \vdots \\ \text{---} \end{array} = f \begin{array}{c} \overbrace{\dots}^{m+n \text{ marcas}} \\ \vdots \\ \text{---} \end{array} - \begin{array}{c} \overbrace{\dots}^{m \text{ marcas}} \quad \overbrace{\dots}^{n \text{ marcas}} \\ \vdots \\ \text{---} \end{array} \quad (43)$$

Con todas las proposiciones enunciadas en esta sección es posible determinar una descomposición en términos de hojas dobles para el diagrama

$$\begin{array}{c} \overbrace{\dots}^{m \text{ marcas}} \quad \overbrace{\dots}^{n \text{ marcas}} \\ \vdots \\ \text{---} \\ \vdots \\ \overbrace{\dots}^{p \text{ marcas}} \quad \overbrace{\dots}^{q \text{ marcas}} \\ \text{---} \end{array} \quad (44)$$

donde n y q no pueden ser simultáneamente cero (de serlo, el diagrama ya sería una hoja doble). Esta escritura se deja como proposición.

Proposición 37 Para m, p naturales, n, q enteros no negativos y no simultáneamente nulos se tiene que

$$\begin{array}{c} \overbrace{\dots}^{m \text{ marcas}} \quad \overbrace{\dots}^{n \text{ marcas}} \\ \vdots \\ \text{---} \\ \vdots \\ \overbrace{\dots}^{p \text{ marcas}} \quad \overbrace{\dots}^{q \text{ marcas}} \\ \text{---} \end{array} = -2f \begin{array}{c} \overbrace{\dots}^{m+n \text{ marcas}} \\ \vdots \\ \text{---} \\ \vdots \\ \overbrace{\dots}^{p+q \text{ marcas}} \\ \text{---} \end{array} + \begin{array}{c} \overbrace{\dots}^{m+n \text{ marcas}} \\ \vdots \\ \text{---} \\ \vdots \\ \overbrace{\dots}^{p \text{ marcas}} \quad \overbrace{\dots}^{q \text{ marcas}} \\ \text{---} \end{array} + \begin{array}{c} \overbrace{\dots}^{m \text{ marcas}} \quad \overbrace{\dots}^{n \text{ marcas}} \\ \vdots \\ \text{---} \\ \vdots \\ \overbrace{\dots}^{p+q \text{ marcas}} \\ \text{---} \end{array} \quad (45)$$

DEMOSTRACIÓN. La demostración se divide en tres casos.

Caso 1: $n = 0$ y $q \neq 0$.

En este caso, tenemos que

$$\begin{aligned}
& \text{Diagram 1} = \text{Diagram 2} \\
& = \text{Diagram 3} - \text{Diagram 4} \quad sf \\
& = -f \text{Diagram 5} + \text{Diagram 6} - f \text{Diagram 7} \\
& + \text{Diagram 8} \\
& = -2f \text{Diagram 9} + \text{Diagram 10} + \text{Diagram 11}
\end{aligned}$$

lo que demuestra la proposición para este caso particular.

Caso 2: $n \neq 0$ y $q = 0$.

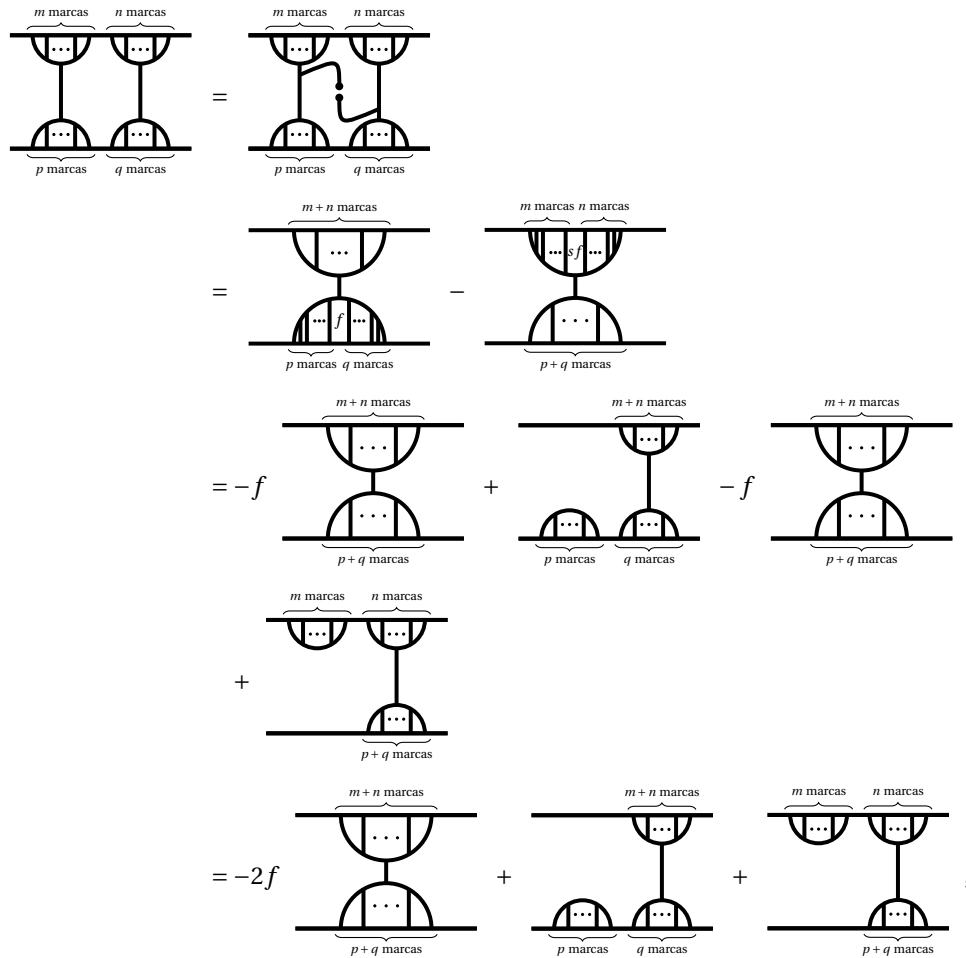
En este caso, tenemos que

$$\begin{aligned}
& \text{Diagram 1} = \text{Diagram 2} \\
& = \text{Diagram 3} - \text{Diagram 4} \\
& = sf \text{Diagram 5} + \text{Diagram 6} - f \text{Diagram 7} \\
& + \text{Diagram 8} \\
& = -2f \text{Diagram 9} + \text{Diagram 10} + \text{Diagram 11}
\end{aligned}$$

lo que demuestra la proposición para este caso particular.

Caso 3: $n \neq 0$ y $q \neq 0$.

Finalmente en este caso tenemos que



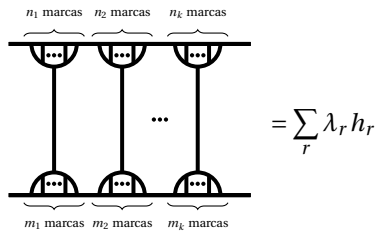
concluyendo así la demostración de esta proposición. □

Para concluir la demostración de esta sección necesitamos verificar que cada generador $g_{i,j,k}$, con $i \in \{1,2,3,4\}$ y $j, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ se puede escribir como combinación lineal de hojas dobles. Para esto, se demuestra un resultado un poco más general que este.

Como una manera de no sobrecargar de diagramas la demostración, en ocasiones éstos estarán representados por letras (y en general, h_r representará a una hoja doble, salvo que se mencione lo contrario). Además, \sum_r siempre denotará una suma finita sobre el índice natural r .

A continuación, una ampliación de la Proposición 37.

Proposición 38 Para todo $k \in \mathbb{N}$, y enteros no negativos n_i, m_i con $i \in \{1,2,3,\dots,k\}$ se tiene que



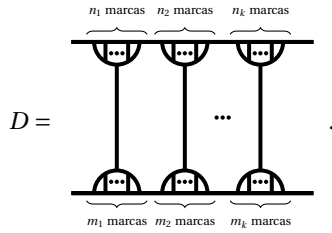
donde $\lambda_r \in R$ y h_r es hoja doble.

DEMOSTRACIÓN.

Se procederá por inducción sobre k .

Si $k = 1$ el diagrama ya es una hoja doble. Si $k = 2$ se aplica directamente la Proposición 37.

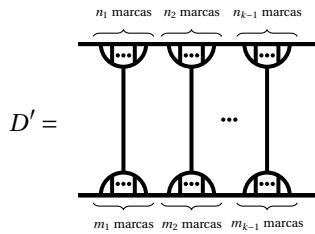
Supongamos que el resultado vale para todo natural menor que k . Ahora, el diagrama a descomponer es



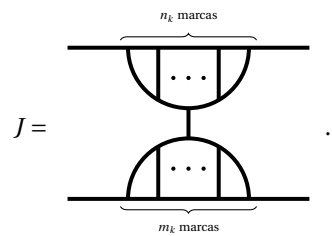
Sin embargo, podemos expresar a D de la manera

$$D = D' \otimes J,$$

donde



y



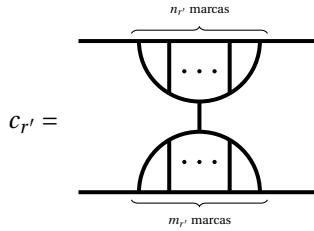
Por hipótesis se tiene que $D' = \sum_{r'} \lambda_{r'} h_{r'}$, luego

$$D = \sum_{r'} \lambda_{r'} (h_{r'} \otimes J).$$

Ahora, cada $h_{r'}$ es una hoja doble. Si $h_{r'}$ tiene conexión entre bandas entonces acepta una descomposición de la forma

$$h_{r'} = h'_{r'} \otimes c_{r'},$$

donde $h'_{r'}$ es $h_{r'}$ con su eventual conexión entre bandas suprimida y $c_{r'}$ es la conexión entre bandas de $h_{r'}$ de tipo



Definiendo C como el conjunto de todas las hojas dobles $h_{r'}$ de la descomposición de D' que tienen conexión entre bandas, entonces se tiene que

$$\begin{aligned} D &= \sum_{h_{r'} \in C} \lambda_{r'} h_{r'} + \sum_{h_{r'} \notin C} \lambda_{r'} h_{r'} \\ &= \sum_{h_{r'} \in C} \lambda_{r'} (h'_{r'} \otimes c_{r'}) \otimes J + \sum_{h_{r'} \notin C} \lambda_{r'} (h_{r'} \otimes J) \\ &= \sum_{h_{r'} \in C} \lambda_{r'} h'_{r'} \otimes (c_{r'} \otimes J) + \sum_{h_{r'} \notin C} \lambda_{r'} (h_{r'} \otimes J), \end{aligned}$$

pero por la Proposición 37 tenemos que cada diagrama $c_{r'} \otimes J$ es una combinación lineal de hojas dobles, digamos

$$c_{r'} \otimes J = \sum_s \lambda_s h_s,$$

y por otra parte, si $h_{r'} \notin C$ entonces $h_{r'} \otimes J$ es una hoja doble, digamos

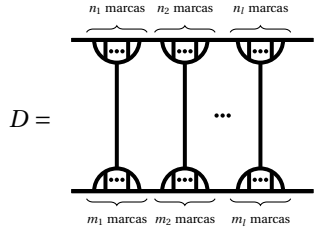
$$h_{r'} \otimes J = h''_{r'},$$

lo que nos permite afirmar que

$$\begin{aligned} D &= \sum_{h_{r'} \in C} \lambda_{r'} h'_{r'} \otimes \left(\sum_s \lambda_s h_s \right) + \sum_{h_{r'} \notin C} \lambda_{r'} h''_{r'} \\ &= \sum_{h_{r'} \in C} \sum_s \lambda_{r'} \lambda_s (h'_{r'} \otimes h_s) + \sum_{h_{r'} \notin C} \lambda_{r'} h''_{r'}, \end{aligned}$$

y como la concatenación vertical de hojas dobles es otra hoja doble (o cero), entonces D es la suma de dos combinaciones lineales de hojas dobles, con lo que queda demostrada la proposición. \square

Volviendo a los generadores $g_{i,j,k}$, tenemos que cada uno de ellos es de la forma



Específicamente, se tiene que:

- Para obtener $g_{1,j,k}$ en el diagrama D , consideramos:

- $n_{j+1} = 1$ y $m_{j+1} = 0$
- $n_t = m_t = 1, \forall t \neq j + 1$.

- Para obtener $g_{2,j,k}$ en el diagrama D , consideramos:

- $n_{j+1} = 0$ y $m_{j+1} = 1$
- $n_t = m_t = 1, \forall t \neq j + 1$.

- Para obtener $g_{3,j,k}$ en el diagrama D , consideramos:

- $n_{j+1} = 2$ y $m_{j+1} = 1$
- $n_t = m_t = 1, \forall t \neq j + 1$.

- Para obtener $g_{4,j,k}$ en el diagrama D , consideramos:

- $n_{j+1} = 1$ y $m_{j+1} = 2$
- $n_t = m_t = 1, \forall t \neq j + 1$.

Por lo tanto vale la siguiente proposición.

Proposición 39 Para $i = 1, 2, 3, 4$ y j, k enteros no negativos, se tiene que

$$g_{i,j,k} = \sum_r \lambda_r h_r,$$

donde $\lambda_r \in R$ y h_r es hoja doble.

En la igualdad de la Proposición 39, si concatenamos de manera vertical una hoja doble cualquiera, y considerando nuevamente el hecho de que una concatenación vertical de dos hojas dobles es cero o una hoja doble, entonces es inmediato el siguiente resultado.

Proposición 40 Sean $i = 1, 2, 3, 4$ y j, k enteros no negativos. Si h es una hoja doble, entonces

$$g_{i,j,k} h = \sum_r \lambda_r h_r,$$

donde $\lambda_r \in R$ y h_r es hoja doble.

Para demostrar el resultado principal de esta sección se demostrará antes un caso particular que será útil.

Proposición 41 Sea d morfismo de \mathcal{D} de la forma

$$\prod_{t=1}^n g_{i_t, j_t, k_t},$$

donde $i_t \in \{1, 2, 3, 4\}$ para todo t y tanto j_t como k_t son enteros no negativos para todo j , entonces

$$d = \sum_r \lambda_r h_r,$$

donde $\lambda_r \in R$ y h_r es hoja doble.

Observación: La notación $\prod_{t=1}^n$ representa de manera abreviada la concatenación vertical de n diagramas, siendo el diagrama indexado por $t = 1$ el primer diagrama de arriba hacia abajo en dicha concatenación y $t = n$ el último.

DEMOSTRACIÓN.

Sea d morfismo de \mathcal{D} de la forma del enunciado. Se procederá por inducción sobre n .

Si $n = 1$, entonces se aplica directamente la Proposición 39.

Supongamos ahora que el resultado vale para concatenaciones verticales de $n - 1$ diagramas.

Ahora, si $d = \prod_{t=1}^n g_{i_t, j_t, k_t}$, entonces tenemos que

$$\begin{aligned} d &= \prod_{t=1}^n g_{i_t, j_t, k_t} \\ &= g_{i_1, j_1, k_1} \prod_{t=2}^n g_{i_t, j_t, k_t} \\ &= g_{i_1, j_1, k_1} \sum_{r'} \lambda_{r'} h_{r'} \quad (\text{Hipótesis}) \\ &= \sum_{r'} \lambda_{r'} g_{i_1, j_1, k_1} h_{r'} \\ &= \sum_{r'} \lambda_{r'} \left(\sum_s \lambda_s h_s \right) \quad (\text{Proposición 40}) \\ &= \sum_{r'} \sum_s \lambda_{r'} \lambda_s h_s \\ &= \sum_r \lambda_r h_r \end{aligned}$$

demostrando así la proposición. □

Finalmente, el resultado principal de esta subsección.

Proposición 42 Sea d morfismo de \mathcal{D} , entonces

$$d = \sum_r \lambda_r h_r,$$

donde $\lambda_r \in R$ y h_r es hoja doble.

DEMOSTRACIÓN.

Sea d morfismo de \mathcal{D} . Por definición de los morfismos de la categoría de los diagramas y su generación en términos de los $g_{i,j,k}$, tenemos que

$$d = \sum_{s=1}^N P_s,$$

donde cada P_s es una concatenación de tipo

$$\prod_{t=1}^n g_{i_t, j_t, k_t}.$$

Se procederá por inducción sobre N .

Si $N = 1$ se aplica directamente la Proposición 41.

Supongamos que el resultado vale para $N - 1$. Finalmente, tenemos que

$$\begin{aligned} d &= \sum_{s=1}^N P_s \\ &= \sum_{s=1}^{N-1} P_s + P_N \\ &= \sum_r \lambda'_r h'_r + \sum_r \lambda''_r h''_r \quad (\text{Hipótesis y Proposición 41}) \\ &= \sum_r \lambda_r h_r \end{aligned}$$

demostrando la proposición. □

4.2. Independencia Lineal de las hojas dobles

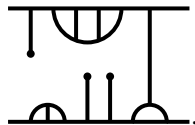
Para demostrar que las hojas dobles forman una base para los morfismos respectivos de \mathcal{D} se debe probar en segunda instancia que forman un conjunto linealmente independiente (l.i.), y para demostrar esto se utilizarán las hojas dobles vistas como morfismos de bimódulos mediante el funtor \mathcal{F} definido en la Sección 4.

En otras palabras, si $\underline{n}, \underline{m}$ son elementos de S^n y S^m respectivamente, en esta sección se busca demostrar que el conjunto $\mathcal{F}(\mathbb{L}_{\underline{n}}^a \cdot \mathbb{L}_{\underline{m}}) \subset \text{Hom}(B_{\underline{m}}, B_{\underline{n}})$ es l.i.

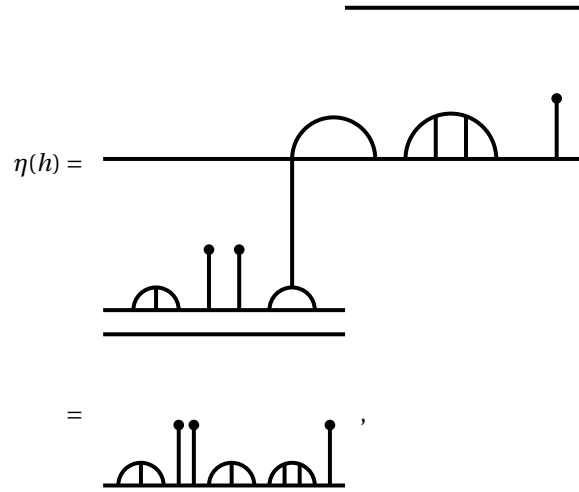
Sin embargo, no se demostrará directamente que $\mathcal{F}(\mathbb{L}_{\underline{n}}^a \cdot \mathbb{L}_{\underline{m}})$ es l.i., sino que usaremos el hecho (probado en [7] y mencionado en [8]) de que

$$\text{Hom}(B_{\underline{m}}, B_{\underline{n}}) \cong \text{Hom}(B_{\underline{m}B_{\underline{n}}}, R),$$

y en este caso en el que estamos trabajando, el cómo actúa este isomorfismo, que llamaremos η , se puede ver de manera sencilla usando diagramas. Para ejemplificar lo anterior, consideremos la hoja doble $h \in \mathbb{L}_{\underline{6}}^a \cdot \mathbb{L}_{\underline{7}}$



El isomorfismo η consiste en tomar las jaulas, dots y eventuales conexiones de banda superior y rotarlos 180 grados en sentido horario respecto al punto más a la derecha de la misma banda, y finalmente bajarlos y "pegarlos" a la banda inferior. En este caso, el resultado de esto sería el siguiente:

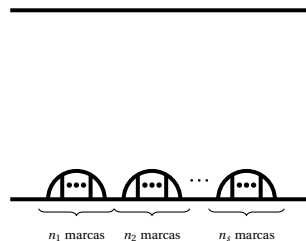


el cual como se puede apreciar es un diagrama que, visto como morfismo de bimódulos vía \mathcal{F} , pertenece a $Hom(B_7 B_6, R)$, pues tiene 13 marcas en su banda inferior y ninguna en la superior. En general, se tiene que cualquier imagen de η será un morfismo cuyo diagrama correspondiente vía \mathcal{F} tendrá en su banda inferior solamente jaulas y dots, y en su banda superior ninguna marca. Llamaremos a este conjunto de morfismos de bimódulos por H_l , donde $l \in \mathbb{N}$, es decir,

$$\eta\left(\mathcal{F}\left(\mathbb{L}_n^a \cdot \mathbb{L}_m\right)\right) = H_{l=m+n}.$$

Por lo tanto, como η es un isomorfismo, basta demostrar que el conjunto H_l es linealmente independiente. Para esto, se definirá un etiquetado para cada elemento $h \in H$ en base al diagrama $d \in \mathcal{D}$ tal que $\mathcal{F}(d) = h$, y con este etiquetado se podrá establecer un orden total en H_l , con el cual se podrá demostrar la independencia lineal.

Para comenzar la descripción del etiquetado de un elemento $h = \mathcal{F}(d) \in H_l$, debemos notar que tal como se mencionó anteriormente, d es de la forma



(45)

donde $s \in \mathbb{N}$ y $\sum_{r=1}^s n_r = l$. Recordemos que si $n_p = 1$ significa que dicha jaula de posición p (de izquierda a derecha) es un dot. Ahora, la definición del etiquetado.

Definición 43 Sea $h \in H_l$ y $d \in \mathcal{D}$ su preimagen bajo \mathcal{F} . Se define el etiquetado de h , denotado j_h , a la tupla de $\{0, 1\}^l$ descrita de la siguiente manera:

$$j_h = \begin{cases} (0, \underbrace{1, 1, \dots, 1}_{l-1 \text{ veces}}) & \text{si } d = J_l \\ j_{\mathcal{F}(J_{n_1})} j_{\mathcal{F}(J_{n_2})} \cdots j_{\mathcal{F}(J_{n_k})} & \text{si } d = J_{n_1} \otimes J_{n_2} \otimes \cdots \otimes J_{n_k}, \text{ con } n_1 + n_2 + \cdots + n_k = l \end{cases}$$

donde la notación multiplicativa entre dos tuplas t_1 y t_2 indica concatenación horizontal de ambas tuplas y J_m representa una jaula de largo m .

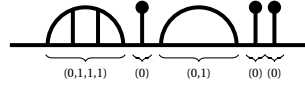
Para ejemplificar lo anterior, consideremos al morfismo $h = \mathcal{F}(d)$, donde

$$d = J_5 =$$



entonces $j_h = (0, 1, 1, 1, 1)$. Si en cambio consideramos que

$$d = J_4 \otimes J_1 \otimes J_2 \otimes J_1 \otimes J_1 =$$



entonces $j_h = (0, 1, 1, 1, 1)(0)(0, 1)(0)(0) = (0, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 0)$.

Cabe destacar que a cada morfismo $h = \mathcal{F}(d) \in H_l$ le corresponde una y solo una etiqueta j_h , pues la función definida por

$$\begin{aligned} e: H_l &\longrightarrow \{0, 1\}^l - A \\ h &\longmapsto j_h \end{aligned}$$

es biyectiva, donde A es el conjunto de todas las tuplas en $\{0, 1\}^l$ que comienzan con un 1. La biyectividad se tiene debido a que $|H_l| = |\{0, 1\}^l - A| = 2^{l-1}$ y además es inyectiva.

Ahora, consideremos un morfismo $f \in H_l$ con su etiqueta $j_f = (j_1, j_2, \dots, j_l)$. Se define

$$\alpha^{j_f} = \alpha_s^{j_1} \otimes \alpha_s^{j_2} \otimes \cdots \otimes \alpha_s^{j_l} \otimes 1 \in \underbrace{B_s B_s \cdots B_s}_{l \text{ veces}}$$

donde $\alpha_s^0 = 1$ y $\alpha_s^1 = \alpha_s$.

El propósito es demostrar que $f(\alpha^{j_f}) = 1$ y que $f(\alpha^{j'}) = 0$ para toda tupla $j' < j_f$, donde $<$ indica el orden lexicográfico en $\{0, 1\}^l$ definido de la siguiente manera:

$$(u_1, u_2, \dots, u_l) < (v_1, v_2, \dots, v_l) \Leftrightarrow u_1 < v_1 \vee (u_1 = v_1 \wedge (u_2, u_3, \dots, u_l) < (v_2, v_3, \dots, v_l)).$$

En primera instancia, veremos este resultado para el caso $f = \mathcal{F}(J_m)$ y luego lo ampliaremos a un caso arbitrario en H_l .

Desde ahora denotaremos por \mathcal{I}_m al morfismo $\mathcal{F}(J_m)$, es decir

$$\mathcal{I}_m = \begin{cases} d_0 & \text{si } m = 1 \\ d_0 \circ t_0 \circ \underbrace{\prod_{i=1}^{m-2} (\text{Id}^i \otimes t_0)}_{i=1} & \text{si } m > 1 \end{cases}$$

donde

$$\text{Id}^k = \underbrace{\text{Id} \otimes \text{Id} \otimes \cdots \otimes \text{Id}}_{k \text{ veces}}$$

y

$$\prod_{i=1}^{m-2} (\text{Id}^i \otimes t_0) = (\text{Id} \otimes t_0) \circ (\text{Id}^2 \otimes t_0) \circ \cdots \circ (\text{Id}^{m-2} \otimes t_0).$$

Proposición 44 Para m natural se tiene que

$$\mathcal{I}_m(\alpha^{j_{\mathcal{I}_m}}) = 2^{m-1}.$$

DEMOSTRACIÓN. Por inducción sobre m .

Si $m = 1$ entonces $\mathcal{I}_m = d_0$ y su etiqueta es $j_{d_0} = (0)$, por ende

$$\begin{aligned} d_0(\alpha^{j_{d_0}}) &= d_0(\alpha^{(0)}) \\ &= d_0(1 \otimes 1) \\ &= 1 = 2^0. \end{aligned}$$

Supongamos ahora que el resultado vale para $m = k - 1$. Finalmente, si consideramos $m = k$, tenemos que

$$\mathcal{I}_k = \mathcal{I}_{k-1} \circ (\text{Id}^{k-2} \otimes t_0),$$

y además $j_{\mathcal{I}_k} = (0, \underbrace{1, 1, \dots, 1}_{k-1 \text{ veces}})$, por lo que

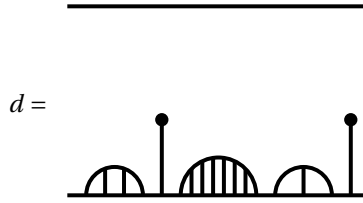
$$\begin{aligned} \mathcal{I}_k(j_{\mathcal{I}_k}) &= \mathcal{I}_{k-1} \left((\text{Id}^{k-2} \otimes t_0)(\alpha^{j_{\mathcal{I}_k}}) \right) \\ &= \mathcal{I}_{k-1} \left((\text{Id}^{k-2} \otimes t_0) \left(1 \otimes \underbrace{\alpha_s \otimes \alpha_s \otimes \cdots \otimes \alpha_s}_{k-1 \text{ veces}} \otimes 1 \right) \right) \\ &= \mathcal{I}_{k-1} \left(1 \otimes \underbrace{\alpha_s \otimes \alpha_s \otimes \cdots \otimes \alpha_s}_{k-3 \text{ veces}} \otimes t_0(\alpha_s \otimes \alpha_s \otimes 1) \right) \\ &= \mathcal{I}_{k-1} \left(1 \otimes \underbrace{\alpha_s \otimes \alpha_s \otimes \cdots \otimes \alpha_s}_{k-3 \text{ veces}} \otimes 2\alpha_s \otimes 1 \right) \\ &= 2 \mathcal{I}_{k-1} \left(1 \otimes \underbrace{\alpha_s \otimes \alpha_s \otimes \cdots \otimes \alpha_s}_{k-2 \text{ veces}} \otimes 1 \right) \\ &= 2 \cdot 2^{k-2} \\ &= 2^{k-1}. \end{aligned}$$

□

Para ampliar la proposición anterior a un morfismo arbitrario $f = \mathcal{F}(d) \in H_l$ debemos notar que el diagrama d posee n jaulas (incluyendo a los dots como jaulas de largo 1) tal cual se mencionó en (45), entonces vía \mathcal{F} se tiene que

$$f = \mathcal{J}_{m_1} \circ \underset{i=1}{\overset{n-1}{\mathbb{C}}} \left(\text{Id}^{\sum_{k=1}^i m_k} \otimes \mathcal{J}_{m_{i+1}} \right), \quad (46)$$

donde m_i es el largo de la jaula de posición i en el diagrama d y además $\sum_{k=1}^n m_k = l$. A modo de ejemplo, consideremos el morfismo $f = \mathcal{F}(d)$ donde



Aquí se tiene que $m_1 = 4$ (largo de la primera jaula), $m_2 = 1$ (el primer dot), $m_3 = 8$ (largo de la segunda jaula), $m_4 = 3$ (largo de la tercera jaula) y $m_5 = 1$ (el segundo dot). Con esto, podemos concluir que la descomposición de f está dada por

$$f = \mathcal{J}_4 \circ \left(\text{Id}^4 \otimes \mathcal{J}_1 \right) \circ \left(\text{Id}^{4+1} \otimes \mathcal{J}_8 \right) \circ \left(\text{Id}^{4+1+8} \otimes \mathcal{J}_3 \right) \circ \left(\text{Id}^{4+1+8+3} \otimes \mathcal{J}_1 \right).$$

Con esto, estamos en condiciones de ampliar el resultado de la Proposición 44.

Proposición 45 Sea $f \in H_l$ como en (46). Entonces

$$f(\alpha^{j_f}) = 2^{m_1+m_2+\dots+m_n-n}.$$

DEMOSTRACIÓN.

Sea $f = \mathcal{J}_{m_1} \circ \underset{i=1}{\overset{n-1}{\mathbb{C}}} \left(\text{Id}^{\sum_{k=1}^i m_k} \otimes \mathcal{J}_{m_{i+1}} \right) \in H_l$. Se procederá por inducción sobre n .

Si $n = 1$ aplica directamente la Proposición 44.

Supongamos ahora que el resultado es válido para $n - 1$. Para continuar la demostración, denotaremos por $\underline{\alpha}^{j_f}$ al elemento

$$\underline{\alpha}^{j_f} = \alpha_s^{j_1} \otimes \alpha_s^{j_2} \otimes \dots \otimes \alpha_s^{j_l}.$$

Notar que $\alpha^{j_f} = \underline{\alpha}^{j_f} \otimes 1$. Además, con la definición de $\underline{\alpha}^{j_f}$ se tiene que

$$\alpha^{j_f} = \underline{\alpha}^{j_{\mathcal{J}_{m_1}}} \otimes \underline{\alpha}^{j_{\mathcal{J}_{m_2}}} \otimes \dots \otimes \underline{\alpha}^{j_{\mathcal{J}_{m_n}}} \otimes 1,$$

y con esto la hipótesis se traduce en que

$$\mathcal{J}_{m_1} \circ \underset{i=1}{\overset{n-2}{\mathbb{C}}} \left(\text{Id}^{\sum_{k=1}^i m_k} \otimes \mathcal{J}_{m_{i+1}} \right) (\underline{\alpha}^{j_{\mathcal{J}_{m_1}}} \otimes \underline{\alpha}^{j_{\mathcal{J}_{m_2}}} \otimes \dots \otimes \underline{\alpha}^{j_{\mathcal{J}_{m_{n-1}}}} \otimes 1) = 2^{m_1+m_2+\dots+m_{n-1}-n+1}.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
f(\alpha^{j_f}) &= \mathcal{J}_{m_1} \circ \underset{i=1}{\overset{n-1}{\text{C}}} \left(\text{Id}^{\sum_{k=1}^i m_k} \otimes \mathcal{J}_{m_{i+1}} \right) (\underline{\alpha}^{j_{\mathcal{J}_{m_1}}} \otimes \underline{\alpha}^{j_{\mathcal{J}_{m_2}}} \otimes \dots \otimes \underline{\alpha}^{j_{\mathcal{J}_{m_n}}} \otimes 1) \\
&= \mathcal{J}_{m_1} \circ \underset{i=1}{\overset{n-2}{\text{C}}} \left(\text{Id}^{\sum_{k=1}^i m_k} \otimes \mathcal{J}_{m_{i+1}} \right) (\underline{\alpha}^{j_{\mathcal{J}_{m_1}}} \otimes \underline{\alpha}^{j_{\mathcal{J}_{m_2}}} \otimes \dots \otimes \underline{\alpha}^{j_{\mathcal{J}_{m_{n-1}}}} \otimes \mathcal{J}_{m_n}(\alpha^{j_{\mathcal{J}_{m_n}}})) \\
&= \mathcal{J}_{m_1} \circ \underset{i=1}{\overset{n-2}{\text{C}}} \left(\text{Id}^{\sum_{k=1}^i m_k} \otimes \mathcal{J}_{m_{i+1}} \right) (\underline{\alpha}^{j_{\mathcal{J}_{m_1}}} \otimes \underline{\alpha}^{j_{\mathcal{J}_{m_2}}} \otimes \dots \otimes \underline{\alpha}^{j_{\mathcal{J}_{m_{n-1}}}} \otimes 2^{m_{n-1}}) \\
&= 2^{m_{n-1}} \mathcal{J}_{m_1} \circ \underset{i=1}{\overset{n-2}{\text{C}}} \left(\text{Id}^{\sum_{k=1}^i m_k} \otimes \mathcal{J}_{m_{i+1}} \right) (\underline{\alpha}^{j_{\mathcal{J}_{m_1}}} \otimes \underline{\alpha}^{j_{\mathcal{J}_{m_2}}} \otimes \dots \otimes \underline{\alpha}^{j_{\mathcal{J}_{m_{n-1}}}} \otimes 1) \\
&= 2^{m_{n-1}} \cdot 2^{m_1+m_2+\dots+m_{n-1}-n+1} \\
&= 2^{m_1+m_2+\dots+m_n-n}.
\end{aligned}$$

□

Ahora se demostrará que si $f \in H_l$ entonces $f(\alpha^{j'}) = 0$ para toda tupla $j' < j_f$. Para esto se procederá como antes: primero se demostrará para un morfismo tipo \mathcal{J}_m y posteriormente para un morfismo arbitrario $f \in H_l$.

Proposición 46 Para m natural se tiene que si $j' < j_{\mathcal{J}_m}$ entonces

$$\mathcal{J}_m(\alpha^{j'}) = 0.$$

DEMOSTRACIÓN. Por inducción sobre m .

Si $m = 1$ entonces $\mathcal{J}_m = d_0$, y en tal caso la etiqueta es $j_{d_0} = (0)$, por lo que no hay nada que demostrar (no hay tupla menor a j_{d_0}).

Por otra parte, si $m = 2$ entonces $\mathcal{J}_2 = d_0 \circ t_0$ y su etiqueta es $(0, 1)$, por lo que la única tupla menor que $(0, 1)$ es $j' = (0, 0)$. En tal caso,

$$\alpha^{j'} = 1 \otimes 1 \otimes 1,$$

y se tiene que

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_2(\alpha^{j'}) &= d_0(t_0(1 \otimes 1 \otimes 1)) \\
&= d_0(0 \otimes 1) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

por lo que el resultado vale para $m = 2$.

Supongamos que la proposición se cumple para $m = k - 1$. Ahora, si consideramos $m = k$, entonces tenemos que $j_{\mathcal{J}_k} = (0, \underbrace{1, 1, \dots, 1}_{k-1 \text{ veces}})$. Sea $j' = (0, j'_2, \dots, j'_k) < j_{\mathcal{J}_k}$ una tupla. Entonces j' tiene al menos un cero en una posición después de la primera. Sea p la última posición en la cual $j'_p = 0$. La demostración continuará con algunos casos para p :

Si $p = k$ entonces

$$\alpha^{j'} = 1 \otimes \alpha_s^{j'_2} \otimes \dots \otimes \alpha_s^{j'_{k-1}} \otimes 1 \otimes 1,$$

y se tiene que

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_k(\alpha^{j'}) &= \mathcal{J}_{k-1}(\text{Id}^{k-2}(1 \otimes \alpha_s^{j'_2} \otimes \cdots \otimes \alpha_s^{j'_{k-2}}) \otimes t_0(\alpha_s^{j'_{k-1}} \otimes 1 \otimes 1)) \\
&= \mathcal{J}_{k-1}(1 \otimes \alpha_s^{j'_2} \otimes \cdots \otimes \alpha_s^{j'_{k-2}} \otimes 0 \otimes 1) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Si $p = k - 1$ entonces

$$\alpha^{j'} = 1 \otimes \alpha_s^{j'_2} \otimes \cdots \otimes \alpha_s^{j'_{k-2}} \otimes 1 \otimes \alpha_s \otimes 1,$$

y se tiene que

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_k(\alpha^{j'}) &= J_{k-1}(\text{Id}^{k-2}(1 \otimes \alpha_s^{j'_2} \otimes \cdots \otimes \alpha_s^{j'_{k-2}}) \otimes t_0(1 \otimes \alpha_s \otimes 1)) \\
&= 2 \mathcal{J}_{k-1}(1 \otimes \alpha_s^{j'_2} \otimes \cdots \otimes \alpha_s^{j'_{k-2}} \otimes 1 \otimes 1) \\
&= 2 \mathcal{J}_{k-1}(\alpha^{j''}),
\end{aligned}$$

donde $j'' = (0, j'_2, j'_3, \dots, j'_{k-2}, 0)$. Como j'' es menor que $j_{\mathcal{J}_{k-1}}$ al tener como último valor cero, entonces por hipótesis se tiene que

$$\mathcal{J}_k = 2 \mathcal{J}_{k-1}(\alpha^{j''}) = 0.$$

Finalmente, si $p < k - 1$ entonces

$$\alpha^{j'} = 1 \otimes \underbrace{\alpha_s^{j'_2} \otimes \cdots \otimes \alpha_s^{j'_{p-1}}}_{p \text{ elementos}} \otimes 1 \otimes \alpha_s \otimes \cdots \otimes \alpha_s \otimes \alpha_s \otimes 1,$$

y se tiene que

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_k(\alpha^{j'}) &= J_{k-1}(\text{Id}^{k-2}(1 \otimes \alpha_s^{j'_2} \otimes \cdots \otimes \alpha_s^{j'_{p-1}} \otimes 1 \otimes \alpha_s \otimes \cdots \otimes \alpha_s) \otimes t_0(\alpha_s \otimes \alpha_s \otimes 1)) \\
&= 2 \mathcal{J}_{k-1}(1 \otimes \alpha_s^{j'_2} \otimes \cdots \otimes \alpha_s^{j'_{p-1}} \otimes 1 \otimes \alpha_s \otimes \cdots \otimes \alpha_s \otimes \alpha_s \otimes 1) \\
&= 2 \mathcal{J}_{k-1}(\alpha^{j''}),
\end{aligned}$$

donde $j'' = (0, j'_2, j'_3, \dots, j'_{p-1}, 0, 1, 1, \dots, 1)$. Como j'' es menor que $j_{\mathcal{J}_{k-1}}$ al tener cero en su coordenada p -ésima, entonces por hipótesis se tiene que

$$\mathcal{J}_k = 2 \mathcal{J}_{k-1}(\alpha^{j''}) = 0.$$

□

Ahora, para la ampliación del resultado de la Proposición 46 a cualquier morfismo $f \in H_l$ se necesita un resultado previo.

Proposición 47 Sea $f \in H_l$ como en (46). Entonces para N entero no negativo fijo y para una tupla $t \in \{0, 1\}^l$ se tiene que

$$f(\underline{\alpha}^t \otimes \alpha_s^N) = \left(\prod_{i=1}^n \mathcal{J}_{m_i}(\alpha^{t^i}) \right) \cdot \alpha_s^N$$

donde la concatenación $t = t^1 t^2 \cdots t^n$ es tal que para cada $i \in [n]$, el largo de t^i es igual al largo de $j_{\mathcal{J}_i}$.

DEMOSTRACIÓN.

Por inducción sobre n .

Si $n = 1$, entonces $f = \mathcal{J}_{m_1}$, y como \mathcal{J}_{m_1} es un morfismo de bimódulos se tiene que

$$f(\underline{\alpha}^t \otimes \alpha_s^N) = \mathcal{J}_{m_1}((\underline{\alpha}^t \otimes 1)\alpha_s^N) = \mathcal{J}_{m_1}(\alpha^t)\alpha_s^N.$$

Supongamos la proposición vale para $n-1$. Finalmente, y considerando una tupla t como indica el enunciado, tenemos que

$$\begin{aligned} f(\underline{\alpha}^t \otimes \alpha_s^N) &= \mathcal{J}_{m_1} \circ \prod_{i=1}^{n-1} \left(\text{Id}^{\sum_{k=1}^i m_k} \otimes \mathcal{J}_{m_{i+1}} \right) (\underline{\alpha}^t \otimes \alpha_s^N) \\ &= \mathcal{J}_{m_1} \circ \prod_{i=1}^{n-2} \left(\text{Id}^{\sum_{k=1}^i m_k} \otimes \mathcal{J}_{m_{i+1}} \right) (\underline{\alpha}^{t^1} \otimes \underline{\alpha}^{t^2} \otimes \cdots \otimes \underline{\alpha}^{t^{n-1}} \otimes \mathcal{J}_{m_n}(\underline{\alpha}^{t^n} \alpha_s^N)) \\ &= \left(\mathcal{J}_{m_1} \circ \prod_{i=1}^{n-2} \left(\text{Id}^{\sum_{k=1}^i m_k} \otimes \mathcal{J}_{m_{i+1}} \right) (\underline{\alpha}^{t^1} \otimes \underline{\alpha}^{t^2} \otimes \cdots \otimes \underline{\alpha}^{t^{n-1}} \otimes 1) \right) (\mathcal{J}_{m_n}(\underline{\alpha}^{t^n} \alpha_s^N)) \\ &= \left(\prod_{i=1}^{n-1} \mathcal{J}_{m_i}(\alpha^{t^i}) \right) \mathcal{J}_{m_n}(\underline{\alpha}^{t^n} \alpha_s^N) \\ &= \left(\prod_{i=1}^n \mathcal{J}_{m_i}(\alpha^{t^i}) \right) \alpha_s^N. \end{aligned}$$

□

Ahora, la ampliación de la Proposición 46.

Proposición 48 Sea $f \in H_l$. Entonces

$$f(\alpha^{j'}) = 0$$

para cualquier tupla $j' < j_f$.

DEMOSTRACIÓN.

Sea $f = \mathcal{J}_{m_1} \circ \prod_{i=1}^{n-1} \left(\text{Id}^{\sum_{k=1}^i m_k} \otimes \mathcal{J}_{m_{i+1}} \right) \in H_l$. Sea además $j' = j^1 j^2 \cdots j^n < j_f$ donde el largo de cada tupla j^i es igual al largo de $j_{\mathcal{J}_{m_i}}$. Considerando $N = 0$ en Proposición 47 tenemos que

$$f(\alpha^{j'}) = \prod_{i=1}^n \mathcal{J}_{m_i}(\alpha^{j^i}).$$

Ahora, como $j' < j_f$, entonces existe $i \in [n]$ tal que $j^i < j_{\mathcal{J}_{m_i}}$, y gracias a la Proposición 46 se tiene que $\mathcal{J}_{m_i}(\alpha^{j^i}) = 0$, por lo que

$$f(\alpha^{j'}) = 0.$$

□

Finalmente, la independencia lineal en H_l .

Proposición 49 Dados $f_1, f_2, \dots, f_{2^l-1} \in H_l$ y escalares $a_1, a_2, \dots, a_{2^l-1} \in R$ tales que

$$\sum_{i=1}^{2^l-1} a_i f_i(x) = 0$$

para todo $x \in B_l = \underbrace{B_s B_s \cdots B_s}_{l \text{ veces}}$, entonces $a_i = 0$ para todo $i \in [2^l-1]$.

DEMOSTRACIÓN.

Sin pérdida de generalidad consideraremos que $j_{f_i} > j_{f_{i+1}}$ para todo $i \in [2^{l-1}]$. Ahora, consideremos el elemento $x = \alpha^{j_{f_{2^{l-1}}}}$. Como $j_{f_i} > j_{f_{2^{l-1}}}$ para todo $i \in [2^{l-1} - 1]$, entonces por Proposición 48 se tiene que

$$f_i(x) = 0$$

para todo $i \in [2^{l-1} - 1]$, y como por Proposición 45 tenemos que $f_{2^{l-1}}(x) = 2^{m_1+m_2+\dots+m_n-n}$ si consideramos a f como en (46), entonces

$$\sum_{i=1}^{2^{l-1}} a_i f_i(x) = 0 \Rightarrow a_{2^{l-1}} f_{2^{l-1}}(x) = 0 \Rightarrow 2^{m_1+m_2+\dots+m_n-n} a_{2^{l-1}} = 0.$$

Repitiendo el proceso se obtiene la proposición. □

REFERENCES

- [1] A. Bjorners, F. Brenti, *Combinatorics of Coxeter Groups*, Graduate texts in Mathematics 2005. Springer.
- [2] B. Elias and M. Khonanov, *Diagramatics for Soergel categories*, arXiv:0902.4700 (2010).
- [3] B. Elias, G. Williamson, *The Hodge theory of Soergel bimodules*, arXiv:1212.0791.
- [4] B. Elias, G. Williamson, *Soergel Calculus*, Representation Theory **20** (2016), 295-374.
- [5] J. E. Humphreys, *Reflections Groups and Coxeter Groups*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, **29**, Cambridge Univ. Press, 1990.
- [6] D. Kazhdan, G. Lusztig, *Representations of Coxeter groups and Hecke algebras*, Inventiones mathematicae **53** 165-184.
- [7] N. Libedinsky, *Sur la catégorie des bimodules de Soergel*, Journal of Algebra **320** (2008) 2675-2694.
- [8] N. Libedinsky, *Light leaves and Lusztig's conjecture*, Advances in Mathematics 280 (2015), 772-807.
- [9] G. Lusztig, *Hecke algebra with unequal parameters*, arXiv:math/0208154v2 (2014).
- [10] W. Soergel, *Kazhdan-Lusztig polynomials and a combinatoric for tilting modules*, Representation Theory **1**, (1997) 83-114.
- [11] W. Soergel, *The combinatorics of Harish-Chandra bimodules*, J. Reine Angew. Math. **429**, 49-74 (1992).
- [12] W. Soergel, *Kazhdan-Lusztig-Polynome und unzerlegbare Bimoduln uber Polynomringen*, J. Inst. Math. Jussieu **6** (2007), no. 3, 501-525.

INSTITUTO DE MATEMÁTICA Y FÍSICA, UNIVERSIDAD DE TALCA, CHILE, MAIL MHERNIANDEZ@UTALCA.CL,
STEEN@INST-MAT.UTALCA.CL,