Sistemas numéricos

(II.1) Números naturales.

Aquí se entregará una construcción del conjunto de los números naturales basada en los postulados de Peano, los cuales permiten concebir una definición rigurosa de este conjunto numérico.

El punto inicial para Peano es postular la existencia de un conjunto no vacío, denotado por $\mathbb{N}$ y cuyos elementos son llamados números naturales. Paralelo a este conjunto, se postula la existencia de una función

$$\begin{aligned} s : \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{N} \\ m &\longmapsto s(m) \end{aligned}$$

en la que el elemento $s(m) \in \mathbb{N}$ se denomina <u>sucesor de m</u>.

Así, tanto $\mathbb{N}$ como la función s están bajo las siguientes condiciones, conocidas como <u>Postulados de Peano</u> o <u>Axiomas de Peano</u>:

(P1) $s : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ es inyectiva

Es decir, si $x \in \mathbb{N}$, $y \in \mathbb{N}$, tales que

$$s(x) = s(y)$$

entonces

$$x = y .$$

(P2) $s(\mathbb{N}) \subsetneq \mathbb{N}$, es decir, $s(\mathbb{N})$ es un subconjunto de $\mathbb{N}$ pero $\exists\, m_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m_0 \notin s(\mathbb{N})$.

(En otros términos, (P2) dice que existen números naturales que no son sucesor de ningún número natural.).

(P3) (Postuladio/Axioma de inducción)

Sea $A \subseteq \mathbb{N}$ tal que

(i) $A \cap (\mathbb{N} \setminus s(\mathbb{N})) \neq \emptyset$

(ii) $s(A) \subseteq A$,

entonces

$$A = \mathbb{N}.$$

(En otros términos, (P3) dice que si un conjunto A tiene al menos un número natural que no es sucesor de ningún otro número natural, y además contiene a todos los sucesores de sus elementos, entonces A es $\mathbb{N}$.).

Estos postulados son los "cimientos" sobre los cuales se construyen los números naturales y sus propiedades. Dicha construcción se obtendrá mediante distintas definiciones y teoremas.

Teorema 1.1

Sea $M \subseteq \mathbb{N}$.

Si M no es vacío, entonces $M - s(M)$ no es vacío.

Demostración

Se demostrará el contrarecíproco: Sea $M \subseteq \mathbb{N}$ tal que $M - s(M) = \phi$.

Pd. $M = \phi$.

Por (P1), $M \neq \mathbb{N}$ (pues $\mathbb{N} - s(\mathbb{N}) \neq \phi$).

Si $M - s(M) = \phi$, entonces todo elemento de M también pertenece a $s(M)$, luego

$$M \subseteq s(M).$$

$$\Longrightarrow \quad s(M)^c \subseteq M^c$$

$$\Longleftrightarrow \quad \mathbb{N} - s(M) \subseteq \mathbb{N} - M \quad . \quad (1)$$

La idea es aplicar (P3) al conjunto $\mathbb{N} - M$, por lo que falta verificar que

$$s(\mathbb{N} - M) \subseteq \mathbb{N} - M.$$

Veamos que

$$s(\mathbb{N} - M) \subseteq \mathbb{N} - s(M).$$

Sea $x \in s(\mathbb{N}-M)$. Entonces existe $y \in \mathbb{N}-M$ tal que $x = s(y)$.

Supongamos que $x \notin \mathbb{N} - s(M)$, entonces $x \in s(M)$, por lo que existe $z \in M$ tal que

$$x = s(z).$$

Como s es inyectiva, entonces

$$s(y) = s(z) \Longrightarrow y = z,$$

lo cual no puede ser posible ($y \notin M \wedge z \in M$); por lo que $x \in \mathbb{N} - s(M)$, y por lo tanto,

$$s(\mathbb{N}-M) \subseteq \mathbb{N} - s(M).$$

Así, por (1), tenemos que

$$s(\mathbb{N}-M) \subseteq \mathbb{N}-M. \quad (2).$$

Además, como $M \subseteq \mathbb{N} \Rightarrow s(M) \subseteq s(\mathbb{N})$

$$\Rightarrow s(\mathbb{N})^c \subseteq s(M)^c$$

$$\Rightarrow \mathbb{N} - s(\mathbb{N}) \subseteq \mathbb{N} - s(M)$$

Entonces $\mathbb{N} - s(\mathbb{N}) \subseteq \mathbb{N} - M$, y como por (P2) $\mathbb{N} - s(\mathbb{N}) \neq \emptyset$, entonces $\mathbb{N} - M \neq \emptyset$. (3)

luego, (2) y (3) verifican (P3) para el conjunto $A = \mathbb{N} - M$, por lo que

$$A = \mathbb{N}$$

$$\Longrightarrow \quad \mathbb{N} - M = \mathbb{N}$$

$$\Longrightarrow \quad M = \phi$$

$\blacksquare$

Teorema 1.2

$\mathbb{N} - s(\mathbb{N})$ contiene un único elemento.

Demostración

Ya sabemos por (P2) que $\mathbb{N} - s(\mathbb{N}) \neq \phi$, es decir, que existe (al menos) un número natural m_0 que no es sucesor de ningún natural.

Sea $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \neq m_0 \wedge x \notin s(\mathbb{N})\} \subseteq \mathbb{N}$.

Pd. $A = \phi$.

De la definición de A tenemos que

$$A = \{m_0\}^c \cap s(\mathbb{N})^c,$$

y

$$A - s(A) = \{x \in A \mid x \neq m_0 \wedge x \notin s(\mathbb{N}) \wedge x \notin s(A)\}.$$

Entonces

$$A - s(A) = A \cap s(A)^c$$
$$= \{m_0\}^c \cap s(\mathbb{N})^c \cap s(A)^c$$
$$= (\mathbb{N} - \{m_0\}) \cap s(\mathbb{N})^c \cap s(A)^c$$
$$= (\mathbb{N} - \{m_0\}) \cap s(A)^c \quad \left(\text{pues } A \subseteq \mathbb{N} \Rightarrow s(\mathbb{N})^c \subseteq s(A)^c\right)$$

Aquí tenemos que $\{m_0\} \not\in A - s(A)$.

Ahora, supongamos $\exists x \in A - s(A)$, entonces

$$x \in \mathbb{N} - \{m_0\} \wedge x \in s(A)^c$$
$$\Longrightarrow x \in \mathbb{N} - \{m_0\} \wedge \{x = m_0 \vee x \in s(\mathbb{N})\}$$
$$\Longrightarrow x \in s(\mathbb{N})$$

Pero esto contradice el hecho de que $x \in A$, por lo que dicho x no existe.

Luego, como $A - s(A) = \phi$, entonces por teorema 1.1. se tiene que $A = \phi$, por lo que $\nexists\, x \in \mathbb{N}$ tal que $x \neq m_0 \wedge x \notin s(\mathbb{N})$. ∎

Obs: El único número natural en $\mathbb{N} - s(\mathbb{N})$ se denota por 1.

Teorema 1.3

$$s(m) \neq m \quad \forall\, m \in \mathbb{N}.$$

Demostración

Supongamos $\exists\, m_0 \in \mathbb{N}$ tq

$$s(m_0) = m_0.$$

Tenemos que $m_0 \neq 1$, pues $1 \notin s(\mathbb{N})$.

Sea $A = \{m_0\}$, entonces $s(A) = \{s(m_0)\}$
$= \{m_0\}$,
$= A$

luego

$$A - s(A) = A - A = \emptyset,$$

y por teorema 1.1 tenemos que $A = \emptyset$,

luego $\nexists$ dicho m_0.

$\blacksquare$

Con estos resultados, los postulados de Peano se pueden reescribir de la siguiente manera:

(P1) s es inyectiva (queda igual).

(P2) Existe un único número natural, denotado por 1, que no es sucesor de ningún número natural.

(P3) Todo conjunto de números naturales que contiene al 1 y que contiene a todos sus sucesores, contiene todos los números naturales.

Ahora, se introducirá el concepto de suma en $\mathbb{N}$.

<u>Teorema 1.4</u> (Definición de suma)

Existe una única función

$$f: \mathbb{N}\times\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$$
$$(x,y) \longmapsto f(x,y)$$

que verifica:

i) $f(x,1) = s(x)$

ii) $f(x,s(y)) = s(f(x,y)) \quad \forall x,y \in \mathbb{N}$.

Esta función se llama <u>suma</u>, y $f(x,y)$ se denota por $x+y$. Es decir,

$$f(x,1) = x+1 = s(x)$$
$$f(x,s(y)) = x+s(y) = s(x+y).$$

<u>Demostración</u>.

1) <u>Existencia</u>.

Sea $L: \{x\in\mathbb{N} \ / \ \exists$ función $f:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{N}$ que verifica (i) y (ii)$\}$.

•) $1\in L$. En efecto, la función $f(1,y)=s(y)$ verifica (i) y (ii):

- $f(1,1) = s(1)$.
- $f(1,s(y)) = s(s(y)) = s(f(1,y))$.

$\cdot\cdot$) $x \in L \Rightarrow s(x) \in L$. En efecto, la función

$$h: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$
$$(s(x), y) \longmapsto s(f(x,y))$$

verifica (i) y (ii).

- $h(s(x), 1) = s(f(x,1)) = s(s(x))$
- $h(s(x), s(y)) = s(f(s(x), s(y))) = s\, h(s(x), y)$.

Por (i) y (ii), entonces por (P3) tenemos que

$$L = \mathbb{N}.$$

2) <u>Unicidad</u>.

Supongamos existe otra función, llamémosla g, que también verifica (i) y (ii).

Consideremos $x \in \mathbb{N}$, y definamos el conjunto

$$A = \{ y \in \mathbb{N} \,/\, f(x,y) \neq g(x,y) \}.$$

<u>Pd</u>. $A = \emptyset$.

Veamos que $A - s(A) = \emptyset$. Por definición,

$$s(A) = \{ z \in \mathbb{N} \,/\, z = s(y) \text{ para algún } y \in A \}$$

$$(*) \; = \{ z \in \mathbb{N} \,/\, z = s(y),\ f(x,y) \neq g(x,y) \}.$$

$$= \{ z \in \mathbb{N} \,/\, z = s(y),\ f(x, s(y)) \neq g(x, s(y)) \}$$

$$= \{ z \in \mathbb{N} \,/\, f(x,z) \neq g(x,z) \} = A$$

Entonces:

$A - s(A) = \emptyset$, y por Teorema 1.1, $A = \emptyset$, luego $f = g$. ∎

Obs: En el paso (*) se usó el hecho de que $1 \notin A$ (pues $f(x,1) = S(x) = g(x,1)$), por lo que si $f(x,y) \neq g(x,y)$, entonces tenemos que $f(x, S(y)) \neq g(x, S(y))$.

Teorema 1.5

La suma es conmutativa y asociativa.

Demostración

1) Asociatividad

Sea $x, y \in \mathbb{N}$, y definamos el conjunto

$$A = \{ z \in \mathbb{N} \,/\, (x+y)+z = x+(y+z) \}.$$

•) $1 \in A$. En efecto:

$$(x+y)+1 = s(x+y) = x + s(y) = x + (y+1).$$

••) $z \in A \Rightarrow s(z) \in A$. En efecto:

$$
\begin{aligned}
(x+y)+s(z) &= s\big((x+y)+z\big) \\
&\overset{z\in A}{=} s\big(x+(y+z)\big) \\
&= x + s(y+z) \\
&= x + (y + s(z)).
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, por (P3), $A = \mathbb{N}$. //

1) Conmutatividad:

Sea $x \in \mathbb{N}$, y se el conjunto

$$A = \{ y \in \mathbb{N} \mid x+y = y+x \}.$$

·) $1 \in A$. En efecto

$$x+y = x+1 = s(x)$$

$$y+x = 1+x = s(x)$$

(pues es la función de la dem. de la existencia).

··) $y \in A \Rightarrow s(y) \in A$. En efecto.

$$
\begin{aligned}
x + s(y) &= x + (y+1) \overset{\text{Asoc.}}{=} (x+y)+1 \\
&\overset{y\in A}{=} (y+x)+1 \overset{\text{Asoc.}}{=} y+(x+1) \\
&\overset{1\in A}{=} y+(1+x) \overset{\text{Asoc.}}{=} (y+1)+x \\
&= s(y)+x.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, por (P3), $A = \mathbb{N}$. ∎

Teorema 1.6.

Sean $x, y, z \in \mathbb{N}$. Entonces:

1) $y \neq x + y$

2) $y \neq z \Longrightarrow x + y \neq x + z$.

Demostración

1) Sea $x \in \mathbb{N}$ fijo. Pd $y \neq x + y$.

Sea $A = \{ y \in \mathbb{N} / y \neq x + y \}$.

- $1 \in A$, pues $x + 1 = s(x) \neq 1 \quad \forall x \in \mathbb{N}$.

- Sea $y \in A$, entonces

$$y \neq x + y \overset{s \text{ inyectiva}}{\Longrightarrow} s(y) \neq s(x+y) \Longrightarrow s(y) \neq x + s(y)$$

$$\Longrightarrow s(y) \in A.$$

Luego, por (P3), $A = \mathbb{N}$.

2) Sea $y, z \in \mathbb{N}$ fijos. Pd $y \neq z \Longrightarrow x+y \neq x+z$.

Sea $A = \{ x \in \mathbb{N} / x + y \neq x + z \}$.

- $1 \in A$. En efecto:

$$y \neq z \overset{s \text{ inyect.}}{\Longrightarrow} s(y) \neq s(z)$$

$$\Longleftrightarrow y + 1 \neq z + 1$$

$$\overset{+ \text{ conmut.}}{\Longleftrightarrow} 1 + y \neq 1 + z.$$

- $x \in A \Longrightarrow s(x) \in A$. En efecto:

$$x \in A \Longrightarrow x+y \neq x+z$$
$$\overset{+\text{ conmut.}}{\Longleftrightarrow} \quad y+x \neq z+x$$
$$\overset{s \text{ inyect.}}{\Longrightarrow} \quad s(y+x) \neq s(z+x)$$
$$\Longleftrightarrow \quad y+s(x) \neq z+s(x)$$
$$\overset{+\text{ conmut.}}{\Longleftrightarrow} \quad s(x)+y \neq s(x)+z.$$

Luego, por (P3), $A = \mathbb{N}$. $\blacksquare$

Con estos resultados, nuevamente podemos reescribir los postulados de Peano. En particular, (P3) resulta en:

(P3) Si $A \subseteq \mathbb{N}$ verifica que
(i) $1 \in A$
(ii) $x \in A \Rightarrow x+1 \in A$
entonces $A = \mathbb{N}$.

Ahora, se introducirá el concepto de producto en $\mathbb{N}$.

<u>Teorema 1.7</u> (Definición de Producto).
Existe una única función

$$\begin{aligned} F: \mathbb{N} \times \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{N} \\ (x,y) &\longmapsto F(x,y) \end{aligned}$$

que verifica:

i) $F(x,1) = x$

ii) $F(x, s(y)) = F(x,y) + x \quad , \forall x, y \in \mathbb{N}.$

Esta función se llama <u>producto</u>, y se denota por

$$F(x,y) = xy.$$

<u>Demostración</u>: Similar a la de función suma (Ejercicio). $\blacksquare$

Utilizando la nueva notación y los resultados previos, el producto (llamado también multiplicación) queda definido por:

$$x \cdot 1 = x$$

$$x(y+1) = xy + x \qquad \forall x, y \in \mathbb{N},$$

o bien:

$$1 \cdot y = y$$

$$(x+1)y = xy + y$$

(estas provienen de la demostración del Teorema 1.7).

<u>Teorema 1.8</u>

El producto es asociativo y conmutativo. Además, es distributivo respecto a la suma, es decir:

$$x(y+z) = xy + xz$$

$$(y+z)x = yx + zx \qquad \forall x, y, z \in \mathbb{N}.$$

<u>Demostración</u>: Ejercicio. $\blacksquare$