def. (Pendiente de un segmento de recta)

Sea A y B puntos de $\mathbb{R}^2$, y sea $\overline{AB}$ el segmento de recta con extremos A y B. Se define la pendiente del segmento $\overline{AB}$, denotada por $m_{\overline{AB}}$, como la tangente del ángulo de inclinación α de $\overline{AB}$ respecto al eje X, es decir:

$$\boxed{m_{\overline{AB}} = \tan(\alpha)\,.} \qquad (1)$$

Observaciones

1) El ángulo α de la def. anterior se obtiene en sentido antihorario, desde el eje X hasta $\overline{AB}$.

2) Si $\alpha = \frac{\pi}{2}$ tangente no está definida. En tal caso se dice que $m_{\overline{AB}}$ es indefinida o indeterminada, y el segmento $\overline{AB}$ en dicho caso corresponde a un segmento vertical.

3) Si $\alpha = 0$, $\tan(\alpha) = 0$. En tal caso se dice que $m_{\overline{AB}}$ es nula, y el segmento $\overline{AB}$ en dicho caso corresponde a un segmento horizontal.

4) $\alpha \in [0, \pi[$.

Con el concepto de pendiente de un segmento se puede definir el concepto de recta en $\mathbb{R}^2$.

def. (Recta en $\mathbb{R}^2$)

Una recta en $\mathbb{R}^2$ es un conjunto infinito de puntos tales que, tomados de dos en dos, forman segmentos de igual pendiente.

Observaciones

1) De la geometría Euclideana se tiene que por un punto "pasan" infinitas rectas. Esto también ocurre en $\mathbb{R}^2$, por lo que si solo se conoce un punto de una recta (y nada más), no se puede obtener más información.

2) Todas las pendientes indefinidas se consideran iguales. Esto permite considerar al subconjunto de $\mathbb{R}^2$ de todos los puntos que forman entre sí segmentos de pendiente indefinida como una recta, la cual será vertical (resp. al EJE X).

Ahora, ya se cuenta con el concepto de pendiente de un segmento en $\mathbb{R}^2$ y con el de recta en $\mathbb{R}^2$. Es entonces natural definir el concepto de pendiente de una recta, pues esta está formada por segmentos de igual pendiente.

def. (Pendiente de una recta)

Sea L una recta en $\mathbb{R}^2$. Se define la pendiente de la recta L, denotada por m_L, como la pendiente de cualquier segmento de recta contenido en L. Es decir,

$$\boxed{m_L = \tan(\alpha) \quad , \text{donde } \measuredangle(\text{Eje } X, \overline{AB}) = \alpha \text{ y } \overline{AB} \subset L.} \quad (2)$$

Observación

En la definición anterior se enuncia implícitamente que todos los segmentos contenidos en L comparten el mismo ángulo de inclinación respecto al eje X. Dicho ángulo se considera de manera natural como el ángulo de inclinación de la recta L respecto al eje X.

De (2) se tiene que si L es una recta en $\mathbb{R}^2$, entonces m_L es igual a $m_{\overline{AB}}$, donde $\overline{AB} \subset L$. Además, la elección del segmento $\overline{AB}$ es arbitraria.

Por otra parte, de (1) se tiene que $m_{\overline{AB}}$ depende de $\alpha = \measuredangle(\text{Eje } X, \overline{AB})$, pero α depende de cómo sea $\overline{AB}$, el cual sólo depende de los puntos A y B.

Es decir, considerando lo anteriormente mencionado, tiene sentido afirmar que m_L está completamente definida mediante dos puntos arbitrarios de L.

Proposición

Sea $L \subset \mathbb{R}^2$ recta, y sean $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$ puntos en L.

Entonces

$$m_L = \begin{cases} \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} & \text{si } x_1 \neq x_2 \quad (3) \\ \text{indefinida} & \text{si } x_1 = x_2 \quad (4) \end{cases}$$

Demostración

(3) $\underline{\text{Pd}}$. $m_L = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

•) Si $y_1 = y_2$ entonces si $\alpha = \measuredangle(\text{Eje } X, \overline{AB})$, tenemos que $\alpha = 0$ ($\overline{AB}$ es horizontal), luego

$$m_L \overset{(2)}{=} m_{\overline{AB}} \overset{(1)}{=} \tan(\alpha) = \tan(0) = 0.$$

Por otra parte,

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_1 - y_1}{x_2 - x_1} = 0$$

por lo que

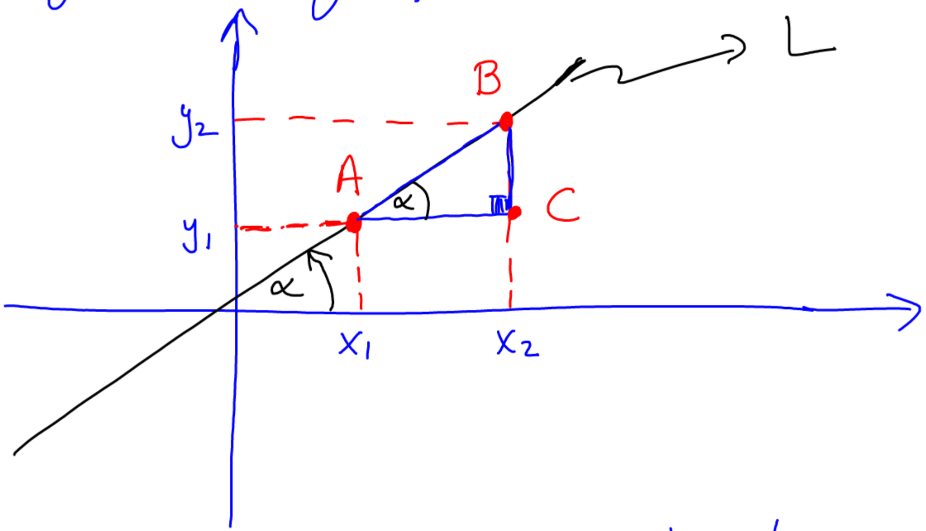
$$m_L = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

••) Si $y_1 \neq y_2$, existen cuatro casos a analizar (todos análogos entre sí):

$$\begin{array}{llll} y_1 < y_2 & y_1 < y_2 & y_1 > y_2 & y_1 > y_2 \\ x_1 < x_2 & x_1 > x_2 & x_1 < x_2 & x_1 > x_2 \end{array}.$$

Aquí solo se demostrará el primer caso.

Como $x_1 < x_2$ e $y_1 < y_2$, podemos considerar sin pérdida de generalidad el siguiente gráfico en $\mathbb{R}^2$:



Entonces, por definición de tangente en ΔACB, tenemos que

$$\tan(\alpha) = \frac{|\overline{BC}|}{|\overline{AC}|}$$

pero $|\overline{BC}| = y_2 - y_1$ y $|\overline{AC}| = x_2 - x_1$, luego

$$m_L = \tan(\alpha) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

(4) Si $x_1 = x_2$, entonces L es vertical, por lo que m_L es indefinida.

Observaciones

1) En la práctica (sobretodo resolución de ejercicios) la tarea de obtener cierta m_L se logra aplicando (3), pues en pocos casos se cuenta con información sobre $\alpha = \sphericalangle(\text{EJE}X, L)$.

2) Si lo buscado es la pendiente de un segmento $\overline{AB} \subset L$, entonces por las observaciones anteriores tenemos que

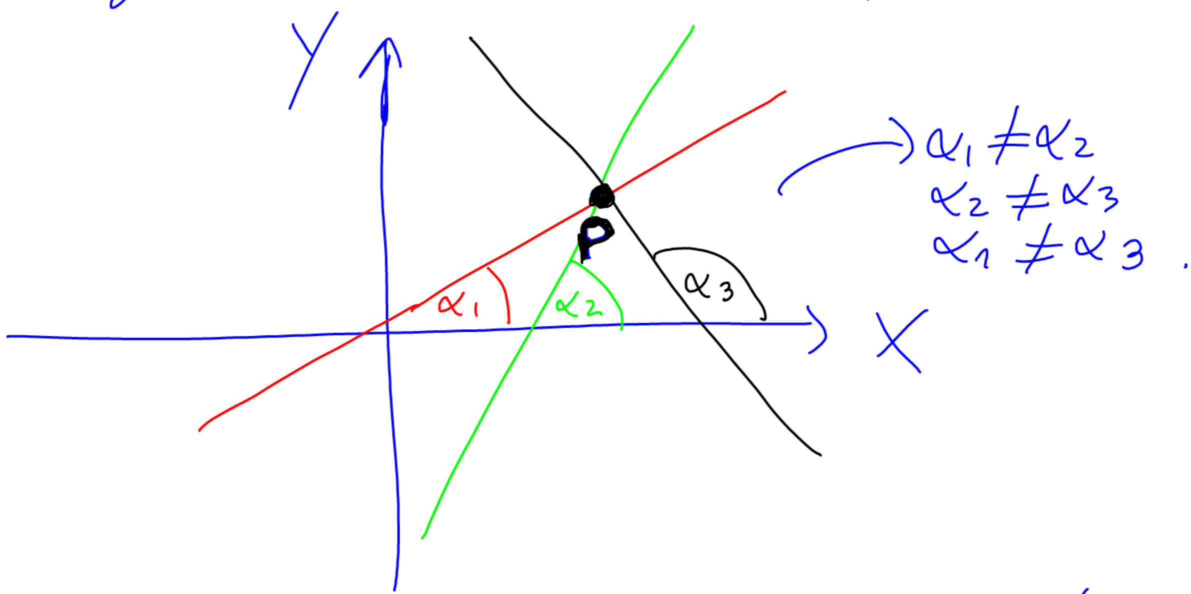
$$m_{\overline{AB}} = m_L .$$

3) En (3) también se tiene que

$$m_L = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} ,$$

es decir, se puede cambiar el "orden" de "primer" y "segundo" punto en dicha expresión.

Anteriormente se mencionó que una recta L no está completamente caracterizada si solo se conoce un punto de ella. Sin embargo, cada una de las infinitas rectas que pasan por un punto tiene una pendiente que es diferente a todas las otras que pasan por el mismo punto, pues el ángulo de inclinación varía para cada recta:



Es precisamente por esto que una recta se puede caracterizar completamente al conocer un punto de ella y su pendiente.

Dicha caracterización se conoce como la ecuación de la recta dada un punto y su pendiente, y se presenta a continuación.

Proposición (Ecuación de recta punto-pendiente)

Sea $L \subset \mathbb{R}^2$ recta, $P = (x_0, y_0) \in L$ y m_L la pendiente de L. Entonces

$$(x,y) \in L \Longleftrightarrow \begin{cases} y - y_0 = m_L(x - x_0) & \text{si } m_L < \infty \quad (5) \\ x = x_0 & \text{si } m_L = \infty \text{ (indefinida)} \quad (6) \end{cases}$$

donde la expresión (5) se denomina ecuación de la recta dado un punto y su pendiente.

Demostración

($\Longrightarrow$) Sea $R=(x,y)\in L$.

•) $m_L<\infty$

Como P y R son puntos de L, entonces $m_{\overline{PR}}=m_L<\infty$, por lo que $\overline{PR}$ no es un segmento vertical, luego $x\neq x_0$. Así,

$$m_{\overline{PR}}=\frac{y-y_0}{x-x_0}\,,$$

por lo que

$$\frac{y-y_0}{x-x_0}=m_L$$

$$\Longrightarrow\quad y-y_0=m_L(x-x_0)\,,$$

verificando (5).

••) $m_L=\infty$.

Como $R\in L$ y $P\in L$, entonces

$$m_{\overline{PR}}=\infty\,,$$

por lo que $\overline{PR}$ es vertical, luego

$x=x_0$, verificando (6).

($\Longleftarrow$) •) Sea $R=(x,y)\in\mathbb{R}^2$ tal que

$$y-y_0=m_L(x-x_0)\,,$$ con $m_L<\infty$.

$$\Longrightarrow\quad y=m_L(x-x_0)+y_0 \qquad (7)$$

Ahora, como $P \in L$, la definición de recta dice que

$$L = \{T=(a,b) \in \mathbb{R}^2 \,/\, m_{\overline{TP}} = m_L\} \cup \{P\}$$

$$\Longrightarrow L = \{T=(a,b) \in \mathbb{R}^2 \,/\, \underbrace{\frac{b-y_0}{a-x_0} = m_L}_{(*)}\} \cup \{P\},$$

pero R satisface $(*)$, pues

$$\frac{y-y_0}{x-x_0} \overset{(7)}{=} \frac{m_L(x-x_0)+y_0-y_0}{x-x_0} = \frac{m_L(x-x_0)}{x-x_0} = m_L,$$

por lo que $R \in L$.

..) Sea $R=(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tal que

$$x = x_0, \quad \text{con } m_L = \infty.$$

Como $x = x_0$, entonces

$$m_{\overline{PR}} = \infty, \text{ luego}$$

$$m_{\overline{PR}} = m_L,$$

$$\Longrightarrow R \in L.$$

■

Con esta proposición se cuenta con una caracterización para cualquier recta en $\mathbb{R}^2$.

Sin embargo no es la única forma de describir una recta.

Proposición.

Sea $L \subset \mathbb{R}^2$ una recta, y sean $P=(x_1,y_1)$ y $Q=(x_2,y_2)$ dos puntos de L. Entonces

$$(x,y)\in L \Longleftrightarrow \begin{cases} y-y_1 = \dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1) & \text{si } m_L<\infty \quad (8) \\[2ex] x = x_1 & \text{si } m_L=\infty \ \text{(indefinida)} \quad (9) \end{cases}$$

donde la expresión (5) se denomina ecuación de la recta dados dos puntos de ella.

Demostración

Lo único que hay que demostrar es

$$(x,y)\in L \Longleftrightarrow (8) \quad \text{si } m_L<\infty.$$

Aquí es suficiente notar que como P y Q son puntos de L, entonces

$$m_{\overline{PQ}} = m_L, \quad \text{luego}$$

$$m_L = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}, \quad \text{luego (8) es lo}$$

mismo que (5) de la proposición anterior. $\blacksquare$

Observación

1) El resultado de esta proposición puede ser reescrito de la siguiente manera:

$$(x,y) \in L \iff (x_2-x_1)(y-y_1)=(y_2-y_1)(x-x_1) \quad (10)$$

Este enunciado es más simple que el inicial debido a que es independiente del valor de m_L.

2) Tanto en (8), (9) y (10) se pueden "intercambiar" los órdenes de x_1, x_2, y_1 e y_2.